

Generische Eigenschaften linearer elektrischer Netzwerke – Arbeitsbericht –

Gunther Reißig

5. Aug. 1996

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Vorbereitung | 4 |
| 2.1 | Matrizenscharen und lineare Algebro-Differentialgleichungen | 4 |
| 2.2 | Die Zweigspannungs-Zweigstrom Gleichungen linearer Netzwerke | 5 |
| 2.3 | Parameterabhängige Matrizen und Matroide | 7 |
| 3 | Der Zusammenhang zwischen Basen gewisser Matroide und Paaren konjugierter Bäume | 8 |
| 4 | Generisch eindeutige Lösbarkeit resistiver Netzwerke | 14 |
| 5 | Generisch eindeutige Lösbarkeit, Komplexitätsordnung und Anfangswertkoordinaten dynamischer Netzwerke | 22 |
| 6 | Über die Position der Minoren maximalen Grades | 28 |
| 7 | Der generische Index eines RLCTG Netzwerkes ist nicht größer als 2 | 30 |
| 8 | Zusammenfassung | 34 |

1 Einleitung

Eines der Hauptanliegen der qualitativen Netzwerkanalyse ist es, Eigenschaften von Netzwerken (NW) allein aus den NW Graphen und den Typen der NW Elemente zu ermitteln, ohne auch nur ein einziges Gleichungssystem aufzustellen.

Nachdem man sich von der eindeutigen Lösbarkeit eines NW überzeugt hat, sind oft der Index der Zweigspannungs-Zweigstrom Gleichungen (ZSZSG) und ein vollständiges System von Anfangswertkoordinaten¹ Gegenstand weiterer Untersuchungen. Sollte der Index 1 über-

¹Die Begriffe *Zustandskoordinaten* und *Zustandsvariablen* werden ebenfalls benutzt.

steigen, so ist es von Interesse, ob und wie das NW verändert werden kann, um ZSZSG vom Index 1 zu erhalten.

Im folgenden wird eine Zusammenstellung der zahlreichen Ergebnisse zu den o.g. Problemen gegeben. Dabei werden nur solche Resultate berücksichtigt, deren Anwendung keine Kenntnis der Parameter der NW Elemente – wie z.B. den exakten Wert eines Widerstandes – erfordert.

Als erstem gelang es BRYANT, die Komplexitätsordnung und ein vollständiges System von Anfangswertkoordinaten eines NW festzustellen [1]. Sein Resultat ist auf lineare passive RLC NW anwendbar und erfordert die Konstruktion eines bestimmten vollständigen Baumes² des NW Graphen. Dieser vollständige Baum, der in der Literatur oft normaler Baum und normaler vollständiger Wald (NSF) genannt wird, enthält eine maximale Anzahl von Kapazitäts-Zweigen (C-Zweigen) und eine minimale Anzahl von Induktivitäts-Zweigen (L-Zweigen) unter allen vollständigen Bäumen des NW Graphen. BRYANT zeigte, daß die Spannungen der C-Zweige im NSF zusammen mit den Strömen der L-Zweige außerhalb des NSF ein vollständiges System von Anfangswertkoordinaten bilden. Als einfache Folgerung aus diesem Resultat erhält man eine Vorschrift, wie das NW verändert werden muß, um ein NW mit ZSZSG vom Index 1 zu erhalten [2, 3]; für allgemeinere als RLC NW ist eine solche Vorschrift nicht bekannt.

Trotzdem BRYANTS Ergebnis auf vielfältige Art und Weise verallgemeinert wurde, ist bis heute keines bekannt, dessen Anwendbarkeit nicht immernoch wesentlich eingeschränkt wäre. Die Einschränkungen betreffen oft die Topologie des NW, und die betrachteten NW dürfen neben Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten nur gekoppelte Induktivitäten [4], ideale Übertrager [5, 6], gekoppelte Induktivitäten und ideale Übertrager [7], Gyrotoren [8–10], gesteuerte Quellen [11–15], gesteuerte Quellen, Gyrotoren und ideale Übertrager [16], oder resistive 3-Knoten 2-Tore [17] enthalten.

Einige andere Resultate sind in der Sprache der Matroide formuliert und auf NW anwendbar, die Nullator-Norator Paare, unabhängige und gesteuerte Quellen, Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten enthalten [18–27]. Das Erfülltsein der Voraussetzungen dieser Resultate läßt sich mit polynomialen Algorithmen nachprüfen³.

Von einigen dieser Ergebnisse behaupten die jeweiligen Autoren, daß sie auf eine noch größere Klasse von NW anwendbar seien [20–22]. Das ist aber nur eingeschränkt der Fall. So sind die Bedingungen aus [22] nur hinreichend für die generisch eindeutige Lösbarkeit eines NW, und für ihre Nachprüfung ist kein polynomialer Algorithmus bekannt. Die Sätze aus [20, 21] enthalten eine sog. “Allgemeinheits-Voraussetzung” (“generality assumption”), die besagt, daß in gewissen Entwicklungen von Unterdeterminanten gewisser, aus den ZSZSG abgeleiteter, Matrizen “kein Auslöschung von Summanden, die ungleich Null sind, erlaubt” ist. Ein Kriterium, mit dessen Hilfe man diese Voraussetzung prüfen könnte, ist nicht bekannt.

Die Ergebnisse von HASLER [28] enthalten Kriterien für die eindeutige Lösbarkeit linearer NW aus Widerständen, Nullator-Norator Paaren und unabhängigen Quellen und wurden von FOSSÉPREZ auf NW, die außerdem gesteuerte Quellen und ideale Übertrager enthalten,

²Die Begriffe *Wald* und *Baum* werden in dieser Arbeit synonym verwendet.

³Ein ganzzahliger Algorithmus heißt polynomial, falls die Anzahl der durchzuführenden Operationen durch ein Polynom in der Problemgröße beschränkt ist. In diesem Bericht wird die Anzahl der Zweige eines NW als die Größe des Problems angesehen.

verallgemeinert⁴ [29].

In diesen Kriterien werden die Begriffe Paar konjugierter Bäume (PCT) bzw. Teilweise Orientierung von Widerständen benutzt, und es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für generisch eindeutige Lösbarkeit bzw. eindeutige Lösbarkeit aller NW einer gewissen NW Klasse, die durch Vorgabe der Vorzeichen der NW Parameter entsteht, angegeben. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die ZSZSG einer solchen NW Klasse vom Index 1 sind, wurde ebenfalls angegeben [30, 29].

Es sind polynomiale Algorithmen zum Prüfen der Voraussetzungen der generisch eindeutigen Lösbarkeit von NW aus Widerständen, Nullator-Norator Paaren und unabhängigen Quellen bekannt [29, 31].

Polynomiale Algorithmen zur Bestimmung des Index' der ZSZSG von NW aus unabhängigen und gesteuerten Quellen, Nullator-Norator Paaren, Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten wurden in [32, 33] angegeben.

In dieser Arbeit wird über neue Resultate zu dem oben angegebenen Problemkreis berichtet. Zunächst werden im Abschnitt 2 grundlegende Begriffe und bekannte Ergebnisse angegeben sowie Bezeichnungen vereinbart.

Die Resultate der Abschnitte 3 bis 6 sind auf NW anwendbar, die neben Nullator-Norator Paaren, unabhängigen und gesteuerten Quellen, Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten auch ideale Übertrager und, teilweise unter gewissen topologischen Einschränkungen, auch Gyratoren enthalten können.

Im Abschnitt 3 wird der Zusammenhang zwischen Basen gewisser Matroide und PCT angegeben. Dadurch wird die Äquivalenz von Kriterien für die Lösbarkeit von NW, die auf Matroiden basieren [23, 34, 35] und solchen, die sich auf PCT stützen [28, 29], aufgedeckt. Außerdem liefert dieser Zusammenhang einen neuen, polynomialen Algorithmus zum Auffinden von PCT, der auf NW anwendbar ist, die neben Nullator-Norator Paaren, Widerständen und unabhängigen Quellen auch gesteuerte Quellen, ideale Übertrager und Gyratoren enthalten.

Im Abschnitt 4 wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß ein resistives NW generisch eindeutig lösbar ist. Die Formulierung dieser Bedingung in der Sprache der Matroide hat den Vorteil, daß ihre Überprüfbarkeit durch polynomiale Algorithmen offensichtlich ist. Unter Zuhilfenahme des Ergebnisses aus Abschnitt 3 wird diese Bedingung aber auch in der Sprache der PCT formuliert. Daneben wird in diesem Abschnitt als eigenständiges Ergebnis eine neue Klasse parameterabhängiger Matrizen angegeben, deren maximaler mit ihrem Term-Rang übereinstimmt.

Im Abschnitt 5 wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß ein dynamisches NW generisch eindeutig lösbar ist. Das Erfülltsein dieser Bedingung ist ebenso wie die generische Komplexitätsordnung und ein generisch vollständiges System von Anfangswertkoordinaten (GFSSC) durch polynomiale Algorithmen berechenbar.

Das Ergebnis aus Abschnitt 3 liefert außerdem eine Verallgemeinerung bekannter, mit Hilfe des Begriffs des NSF formulierter, Resultate. Genauer: Es wird gezeigt, daß ein dynamisches NW genau dann generisch eindeutig lösbar ist, wenn es ein PCT besitzt. In Analogie zur Definition des NSF wird ein PCT normal genannt (NPCT), wenn es unter allen PCT die Summe aus der Anzahl der C-Zweige in den Bäumen und der Anzahl der L-Zweige außerhalb

⁴Die Verallgemeinerung auf NW, die außerdem Gyratoren enthalten, lieferte in [29] nur eine hinreichende Bedingung für die eindeutige Lösbarkeit.

der Bäume maximiert. Es wird gezeigt, daß die Spannungen der C-Zweige in einem NPCT zusammen mit den Strömen der L-Zweige außerhalb dieses NPCT ein GFSSC bildet.

Weiterhin werden in diesem Abschnitt die NW, deren ZSZSG vom generischen Index 1 sind, charakterisiert. Eine Vorschrift zur Modifikation eines NW, die ein NW mit ZSZSG vom Index 1 liefert, wird ebenfalls angegeben.

Schließlich findet sich im Abschnitt 6 ein Resultat über die Position der bei der Indexbestimmung zu untersuchenden Minoren, und im Abschnitt 7 wird gezeigt, daß der generische Index der ZSZSG eines RLCTG NW nicht größer als 2 ist.

2 Vorbereitung

2.1 Matrizenscharen und lineare Algebra-Differentialgleichungen

$A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ seien $n \times n$ Matrizen, $n \in \mathbb{N}$. Das Paar (A, B) wird *Matrizenschar im \mathbb{R}^n* , oder einfach *n -Schar* oder *Schar* genannt. Die n -Schar (A, B) heißt *regulär*, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $sA + B$ regulär ist; andernfalls heißt sie *singulär*.

Für jede reguläre n -Schar (A, B) gibt es reguläre $n \times n$ Matrizen P, Q , so daß

$$A = P \begin{pmatrix} \text{id}_{\mathbb{R}^r} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} Q \quad \text{und} \quad B = P \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & \text{id}_{\mathbb{R}^{n-r}} \end{pmatrix} Q, \quad (1)$$

wobei $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \leq n$, $W \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r)$, und $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-r}, \mathbb{R}^{n-r})$ nilpotent ist [36]. Sowohl r , als auch der Nilpotenz-Index von N sind dabei eindeutig bestimmt [36], letzterer heißt *Index* der Schar (A, B) und wird mit $\text{ind}(A, B)$ bezeichnet [37].

Es sei nun die lineare Algebra-Differentialgleichung (DAE)

$$A\dot{x}(t) + Bx(t) = q(t) \quad (2)$$

gegeben, wobei (A, B) eine n -Schar ist. Hier und im folgenden wird stets angenommen, daß q auf einer nichtleeren offenen Teilmenge von \mathbb{R} definiert und hinreichend glatt ist.

Eine C^1 -Abbildung $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Lösung* von (2), falls sie (2) für alle $t \in I$ erfüllt und $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und zusammenhängend ist. Ein Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt *zu t_0 gehörender konsistenter Anfangswert* für (2), falls es eine Lösung x von (2) gibt, die $x(t_0) = x_0$ erfüllt [38]. Die Menge der zu t_0 gehörenden konsistenten Anfangswerte für (2) wird mit \mathcal{P}_{t_0} bezeichnet.

(A, B) sei eine reguläre n -Schar. Weiter sei $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ die übliche Basis von \mathbb{R}^n , d.h., die i te Komponente von e_i sei 1 und sei gleichzeitig die einzige von Null verschiedene Komponente von e_i . Nun sei $\mathcal{Z} = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ eine r -elementige Menge und $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei der orthogonale Projektor auf $\text{span}\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}\}$, d.h., $\pi\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^r x_{i_j} e_{i_j}$. \mathcal{Z} heißt *vollständiges System von Anfangswertkoordinaten* von (2), falls $\pi\mathcal{P}_{t_0} = \pi\mathbb{R}^n$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$.

Das folgende ist ein bekanntes Resultat:

2.1 Proposition: *Für jede reguläre n -Schar (A, B) gilt*

$$\text{ind}(A, B) = 1 - \deg(s \mapsto \det(sA + B)) + \max_{1 \leq i, j \leq n} (\deg(s \mapsto (\text{adj}(sA + B))_{i,j})),$$

wobei $\text{adj}(sA + B)$ die Transponierte der Matrix der Adjunkten von $sA + B$ und $\deg(s \mapsto p(s))$ den Grad des Polynoms p bezeichnen. \square

Es sei nun die lineare parameterabhängige DAE

$$A(p)\dot{x}(t) + B(p)x(t) = q(t) \quad (3)$$

gegeben, wobei $A, B: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ parameterabhängige $n \times n$ -Matrizen sind und q die selben Eigenschaften wie in (2) hat.

Die parameterabhängige n -Schar (A, B) heißt *generisch regulär* bzw. vom *generischen Index* μ falls $(A(p), B(p))$ für alle p aus einer offenen dichten Teilmenge von \mathbb{R}^k regulär bzw. vom Index μ ist. Im letzten Fall schreibt man $\text{ind}_g(A, B) = \mu$.

Man sagt ebenfalls, daß \mathcal{Z} ein *generisch vollständiges System von Anfangswertkoordinaten* von (3) ist, falls \mathcal{Z} für alle p aus einer offenen dichten Teilmenge von \mathbb{R}^k ein vollständiges System von Anfangswertkoordinaten von (3) ist.

2.2 Die Zweigspannungs-Zweigstrom Gleichungen linearer Netzwerke

Wie bereits erwähnt werden in diesem Bericht lineare Netzwerke (NW) betrachtet, die die folgenden Elemente enthalten können: Unabhängige Strom- und Spannungsquellen, zeitinvariante Widerstände, Kapazitäten, Induktivitäten, Nullator-Norator Paare, gesteuerte Quellen, ideale Mehrwicklungs-Übertrager und Gyratoren.

Gegeben sei ein solches NW \mathcal{N} mit der Zweigmenge $\{1, 2, \dots, b\}$ und dem Parametervektor $p \in \mathbb{R}^k$, der alle Parameter von \mathcal{N} enthält: Widerstands-, Kapazitäts-, Induktivitätswerte, Verstärkungskoeffizienten gesteuerter Quellen, Wicklungsverhältnisse von idealen Übertragern und Gyrationverhältnisse.

Die Zweigspannungs-Zweigstrom Gleichungen (ZSZSG) von \mathcal{N} haben die Form

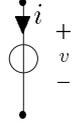
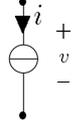
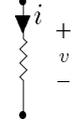
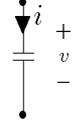
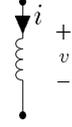
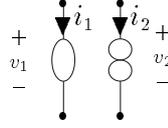
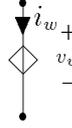
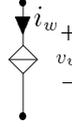
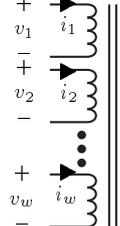
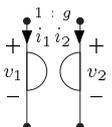
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ \hline A_{LC}(p) \end{pmatrix}}_{A(p):=} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \\ i_1 \\ \vdots \\ i_b \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} K \\ \hline M(p) \\ \hline B_{LC} \end{pmatrix}}_{B(p):=} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \\ i_1 \\ \vdots \\ i_b \end{pmatrix} = q(t), \quad (4)$$

wobei (v_1, \dots, v_b) bzw. (i_1, \dots, i_b) die Zweigspannungen bzw. Zweigströme, K eine die Kirchhoffschen Gleichungen repräsentierende Matrix, $M(p)$ eine die Spannungs-Strom Relationen (VCR) der resistiven Zweige repräsentierende Matrix bezeichnen und die Untermatrizen $A_{LC}(p)$ und B_{LC} die VCR der nicht resistiven Zweige darstellen.

Tab. 1 enthält die Typen der NW Elemente und gibt ihre VCR in der Form an, wie sie in die Matrizen $M(p)$, $A_{LC}(p)$ und B_{LC} von (4) eingeht.

Die Schreibweise

$$\begin{aligned} S &:= \{1, 2, \dots, 2b\} \\ V_j &:= j \\ I_j &:= j + b \end{aligned}$$

| | |
|---|---|
|  | $v(t) = q(t)$ |
|  | $i(t) = q(t)$ |
|  | $Ri - v = 0$ |
|  | $C\dot{v} - i = 0$ |
|  | $L\dot{i} - v = 0$ |
|  | $v_1 = 0$ $i_1 = 0$ |
|  | $\sum_{j \in \mathcal{Z} \setminus \{w\}} \alpha_j v_j + \sum_{j \in \mathcal{Z}} \beta_j i_j - v_w = 0$ |
|  | $\sum_{j \in \mathcal{Z}} \alpha_j v_j + \sum_{j \in \mathcal{Z} \setminus \{w\}} \beta_j i_j - i_w = 0$ |
|  | $0 = \alpha_2 v_1 - v_2$ $0 = \alpha_3 v_1 - v_3$ \vdots $0 = \alpha_w v_1 - v_w$ $0 = i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_w i_w$ |
|  | $v_1 + g i_2 = 0$ $v_2 - g i_1 = 0$ |

Tab. 1: Typen der NW Elemente und ihre VCR in der Form, in der sie in die Matrizen $M(p)$, $A_{LC}(p)$ und B_{LC} von (4) eingeht. Im Falle des idealen w -Wicklungs-Übertragers ist α_j das Verhältnis zwischen der Zahl der Windungen der j -ten und der ersten Wicklung. Im Falle der gesteuerten Quellen ist $\mathcal{Z} = \{1, 2, \dots, b\}$ die Zweigmengung. Man beachte, daß gesteuerte Quellen von mehr als einem Zweig gesteuert werden können.

für alle Zweige j von \mathcal{N} , d.h., für $1 \leq j \leq b$, wird sich als bequem erweisen. Die Spalten der Matrizen $A(p)$ und $B(p)$ in (4) können nun mit V_1 bis V_b und I_1 bis I_b bezeichnet werden.

Um Teilmengen der Spaltenmenge dieser Matrizen in gleicher Weise handhaben zu können, definieren wir

$$V_J := \{ V_j \mid j \in J \} \quad \text{und} \quad I_J := \{ I_j \mid j \in J \}$$

für alle Teilmengen J der Zweigmengen von \mathcal{N} .

Ein NW \mathcal{N} heißt *generisch eindeutig lösbar* falls (A, B) generisch regulär ist. \mathcal{N} heißt vom *generischen Index* μ falls (A, B) generisch regulär und vom generischen Index μ ist. Genauso sagt man, daß \mathcal{Z} ein *generisch vollständiges System von Anfangswertkoordinaten* (GFSSC) von \mathcal{N} ist, falls \mathcal{Z} ein vollständiges System von Anfangswertkoordinaten von (4) ist. Die Anzahl der Elemente eines solchen Systems heißt *Komplexitätsordnung* des NW [1].

2.3 Parameterabhängige Matrizen und Matroide

$Q(p)$ sei eine parameterabhängige Matrix, die analytisch vom Parameter $p \in \mathbb{R}^k$ abhängt; ihre Spaltenmenge sei G . Wir betrachten das System

$$F := \{ X \subseteq G \mid \exists_{p \in \mathbb{R}^k} \text{ Die Spaltenmenge } X \text{ von } Q(p) \text{ ist linear unabhängig.} \} \cup \{\emptyset\}.$$

Im Fall der Matrix

$$Q(p) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 \\ 1 & \cdot & \cdot & p & \cdot \\ \cdot & 1 & -p & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

haben wir zum Beispiel $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und

$$F = 2^G \setminus \{G\},$$

wobei 2^G die Potenzmenge von G ist.

Das so definierte Paar (G, F) erfüllt für alle Matrizen Q mit den oben genannten Eigenschaften die folgenden Bedingungen:

- (i) F ist ein System von Teilmengen von G und $\emptyset \in F$.
- (ii) Aus $X \in F$ zusammen mit $Y \subseteq X$ folgt $Y \in F$.
- (iii) Falls $X, Y \in F$ und $|X| > |Y|$, dann gibt es ein $x \in X \setminus Y$, so daß $Y \cup \{x\} \in F$, wobei $|M|$ die Kardinalität von M bedeutet.

Ein Paar (G, F) endlicher Mengen, das diese Bedingungen erfüllt, heißt *Matroid* [34], und wenn dieses Paar wie oben mit Hilfe der Matrix Q definiert wurde, heißt es *Spaltenmatroid* $\mathcal{M}_C(Q)$ von Q . (Man beachte, daß in diesem Falle $X \in F$ die generische lineare Unabhängigkeit der Spaltenmenge X von Q nach sich zieht.)

Außerdem heißt G *Grundmenge*, und die Elemente von F heißen *unabhängige Mengen*. Eine unabhängige Menge maximaler Kardinalität heißt *Basis*.

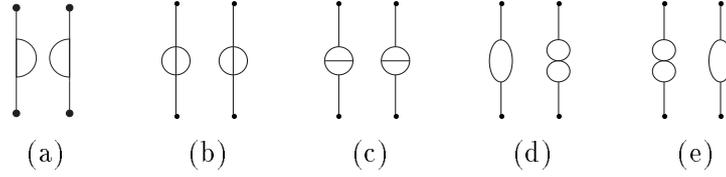


Fig. 1: Der Gyrator (a) wird ersetzt durch die Elemente in (b), (c), (d), oder (e).

Die *Summe* der zwei Matroide (G, F_1) und (G, F_2) wird mit $(G, F_1) \vee (G, F_2)$ bezeichnet und ist definiert als das Paar (G, F) mit

$$F = \{ X \subseteq G \mid \exists X_1 \subseteq X X_1 \in F_1 \wedge X \setminus X_1 \in F_2 \}.$$

Für die Spaltenmatroide $\mathcal{M}_C(Q_1)$ und $\mathcal{M}_C(Q_2)$ der Matrizen

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{1} & \cdot & \bullet & \bullet \\ \cdot & \bullet & 1 & \bullet & \mathbf{1} \\ \cdot & \bullet & \cdot & \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$Q_2(p) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \cdot & \bullet & p & \cdot \\ \bullet & 1 & -p & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

gilt mit $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ zum Beispiel

$$\mathcal{M}_C(Q_1) \vee \mathcal{M}_C(Q_2) = (G, 2^G),$$

da die Spaltenmenge $\{2, 4, 5\}$ von Q_1 linear unabhängig ist und die Spaltenmenge $\{1, 3\}$ von $Q_2(1)$ linear unabhängig ist. (Die entsprechenden Spaltenmengen sind in den obigen Matrizen fett dargestellt.)

3 Der Zusammenhang zwischen Basen gewisser Matroide und Paaren konjugierter Bäume

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen Basen der Spaltenmatroide der Matrizen K und M aus (4) und PCT angegeben.

Zunächst wird der Begriff *Paar konjugierter Bäume* (PCT) von [28–30] auf NW, die neben den in [28–30] zugelassenen Elementen auch ideale Mehrwicklungsübertrager, Induktivitäten und Kapazitäten enthalten, übertragen, und für NW, die Gyrateure enthalten, modifiziert.

3.1 Definition: \mathcal{G} sei der ungerichtete NW Graph eines NW \mathcal{N} , und \mathcal{N} erfülle die folgende Bedingung:

- (A) Jede gesteuerte Quelle wird entweder von genau einer Zweigspannung, oder von genau einem Zweigstrom gesteuert. Der steuernde Zweig jeder spannungsgesteuerten bzw. stromgesteuerten Quelle von \mathcal{N} ist eine unabhängige Stromquelle bzw. eine unabhängige Spannungsquelle (siehe Tab. 2).

| | | | | | | | |
|-----------------------------|--|--|--|--|--|--|--|
| Zu ersetzendes Zweigpaar | | | | | | | |
| Ersetzung 1 | | | | | | | |
| Ersetzung 2 | | | | | | | |

Tab. 2: Jeder Widerstand, jede Reaktanz und jedes Zweigpaar, das zu einer gesteuerten Quelle gehört, wird durch die Elemente entweder der zweiten oder der dritten Zeile der selben Spalte ersetzt.

Ein Paar vollständiger Bäume (t_1, t_2) von \mathcal{G} heißt Paar konjugierter Bäume (PCT), falls alle Gyratoren, Widerstände, Induktivitäten, Kapazitäten und gesteuerten Quellen von \mathcal{N} im Einklang mit Tab. 2 und Fig. 1 so ersetzt werden können, daß die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind.

- (i) t_1 enthält alle Norator-Zweige, keine Nullator-Zweige, alle Zweige unabhängiger Spannungsquellen, keine Zweige unabhängiger Stromquellen und genau $w - 1$ Zweige jedes idealen w -Wicklungs-Übertragers des resultierenden NW.
- (ii) t_2 enthält alle Nullator-Zweige, keine Norator-Zweige, alle Zweige unabhängiger Spannungsquellen, keine Zweige unabhängiger Stromquellen und genau $w - 1$ Zweige jedes idealen w -Wicklungs-Übertragers des resultierenden NW. \square

(4) seien die ZSZSG eines NW \mathcal{N} . Es ist seit langem bekannt, daß die folgenden Aussagen für $t \subseteq \{1, 2, \dots, b\}$ äquivalent zueinander sind [39]:

- (i) Die Spaltenmenge $V_{\{1, 2, \dots, b\} \setminus t}$ von K ist linear unabhängig.
- (ii) Die Spaltenmenge I_t von K ist linear unabhängig.
- (iii) t ist ein vollständiger Baum des ungerichteten NW Graphen von \mathcal{N} .

Das folgende Theorem stellt den Zusammenhang zwischen Paaren vollständiger Bäume mit bestimmten Eigenschaften, nämlich PCT, und Basen der Spaltenmatroide von K und M her.

3.2 Theorem: (4) seien die ZSZSG eines resistiven NW \mathcal{N} , das die Bedingung (A) in Definition 3.1 erfüllt.

Es seien $S_1 \subseteq S$ und

$$t_1 = (I_{\{1, \dots, b\}} \cap S_1) - b, \quad (5)$$

$$t_2 = V_{\{1, \dots, b\}} \setminus S_1, \quad (6)$$

wobei die Subtraktion in (5) elementweise zu verstehen ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist (t_1, t_2) genau dann ein PCT von \mathcal{N} , wenn S_1 eine Basis von $\mathcal{M}_C(K)$ und $S \setminus S_1$ eine Basis von $\mathcal{M}_C(M)$ ist. \square

Beweis: Offenbar gilt für einen beliebigen Zweig z

$$V_z \in S \setminus S_1 \iff z \in t_2,$$

$$I_z \in S \setminus S_1 \iff z \notin t_1.$$

Außerdem ist S_1 , wie bereits erwähnt, genau dann eine Basis von $\mathcal{M}_C(K)$, wenn t_1 und t_2 vollständige Wälder des ungerichteten NW Graphen von \mathcal{N} sind. Die Matrix $M(p)$ ist, bis auf Permutation ihrer Spalten, eine Blockmatrix aus zeilen- und spaltendisjunkten Blöcken M_1, \dots, M_l mit den Spaltenmengen C_1, \dots, C_l , von denen jeder die VCR genau eines NW Elementes repräsentiert. Das bedeutet, daß $S \setminus S_1$ genau dann eine Basis von $\mathcal{M}_C(M)$ ist, wenn $(S \setminus S_1) \cap C_i$ für alle $i \in \{1, \dots, l\}$ eine Basis von $\mathcal{M}_C(M_i)$ ist.

Zunächst wird ein Spannungsquellenzweig z betrachtet. Der entsprechende Block M_i hat eine Zeile und 2 Spalten, $\{V_z\}$ ist die einzige Basis von $\mathcal{M}_C(M_i)$, und $\{V_z, I_z\} \cap (S \setminus S_1) = \{V_z\}$ ist äquivalent zu $z \in t_1 \cap t_2$.

Ist z ein Nullator-Zweig und M_i der dazugehörige 2×2 Block, so ist $\{V_z, I_z\}$ die einzige Basis von $\mathcal{M}_C(M_i)$, und $\{V_z, I_z\} \subseteq S \setminus S_1$ ist äquivalent zu $z \in t_2 \wedge z \notin t_1$.

Analoge Argumente führen bei Stromquellen, Noratoren und Widerständen zum Ziel.

Stellvertretend für gesteuerte Quellen wird nun eine stromgesteuerte Stromquelle (CC-CS) mit steuerndem Zweig x , gesteuertem Zweig y , Verstärkungskoeffizienten p_j und dazugehörigem 2×4 Block

$$M_i(p) = \left(\begin{array}{cc|cc} V_x & V_y & I_x & I_y \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_j & -1 \end{array} \right)$$

mit der Spaltenmenge $C_i = \{V_x, I_x, V_y, I_y\}$ betrachtet. Die einzigen Basen von $\mathcal{M}_C(M_i)$ sind $\{V_x, I_x\}$ und $\{V_x, I_y\}$. Offenbar ist $C_i \cap (S \setminus S_1) = \{V_x, I_x\}$ äquivalent zu $\{x, y\} \cap t_1 = \{y\} \wedge \{x, y\} \cap t_2 = \{x\}$ und $C_i \cap (S \setminus S_1) = \{V_x, I_y\}$ ist äquivalent zu $\{x, y\} \cap t_1 = \{x, y\} \cap t_2 = \{x\}$, was den Ersetzungen 1 und 2 in Tab. 2 entspricht.

Es seien nun x und y die Zweige eines Gytrators mit der Gytrationskonstante p_j und dem dazugehörigen Block

$$M_i(p) = \left(\begin{array}{cc|cc} V_x & V_y & I_x & I_y \\ 1 & 0 & 0 & p_j \\ 0 & 1 & -p_j & 0 \end{array} \right)$$

mit der Spaltenmenge $C_i = \{V_x, I_x, V_y, I_y\}$. $\mathcal{M}_C(M_i)$ hat die vier Basen $\{V_x, V_y\}$, $\{V_x, I_x\}$, $\{V_y, I_y\}$ und $\{I_x, I_y\}$. Offenbar sind jeweils $C_i \cap (S \setminus S_1) = \{V_x, V_y\}$ und $\{x, y\} \subseteq t_1 \cap t_2$,

$C_i \cap (S \setminus S_1) = \{V_x, I_x\}$ und $\{x, y\} \cap t_1 = \{y\} \wedge \{x, y\} \cap t_2 = \{x\}$, $C_i \cap (S \setminus S_1) = \{V_y, I_y\}$ und $\{x, y\} \cap t_1 = \{x\} \wedge \{x, y\} \cap t_2 = \{y\}$, und $C_i \cap (S \setminus S_1) = \{I_x, I_y\}$ und $\{x, y\} \cap (t_1 \cup t_2) = \emptyset$ einander äquivalent, was den Ersetzungen in Fig. 1(b), (d), (e) und (c) entspricht.

Es sei nun $T = \{t_1, \dots, t_w\}$ die Menge der Zweige eines idealen w -Wicklungs-Übertragers mit den Wicklungsverhältnissen p_j, \dots, p_l , wobei $l = j + w - 2$ ist. Der dazugehörige Block

$$M_i(p) = \left(\begin{array}{cccccc|ccccc} V_{t_1} & V_{t_2} & V_{t_3} & \cdots & V_{t_w} & I_{t_1} & I_{t_2} & I_{t_3} & \cdots & I_{t_w} \\ p_j & -1 & & & & & & & & \\ p_{j+1} & & -1 & & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & & & \\ p_l & & & & -1 & & & & & \\ \hline & & & & & 1 & p_j & p_{j+1} & \cdots & p_l \end{array} \right) \quad (7)$$

hat die Spaltenmenge $C_i = V_T \cup I_T$. Die Spaltenmenge V_T von M_i ist linear abhängig, und für jede $(w - 1)$ -elementige Menge $T' \subseteq T$ ist die Spaltenmenge $V_{T'}$ von M_i generisch linear unabhängig. Also ist $(S \setminus S_1) \cap C_i$ genau dann eine Basis von $\mathcal{M}_C(M_i)$, wenn $|(S \setminus S_1) \cap V_T| = w - 1$ und $|(S \setminus S_1) \cap I_T| = 1$ gelten, was zu $|T \cap t_1| = |T \cap t_2| = w - 1$ äquivalent ist. \square

3.3 Beispiel: Für das in Fig. 2(a) dargestellte NW aus [29] sei ein PCT gesucht. Die Matrix $B(p)$ aus den ZSZSG (4) des NW ist

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc} -1 & 1 & \bullet & \cdot & -1 & \bullet & \bullet & 1 & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet \\ -1 & \cdot & \mathbf{1} & \cdot & -1 & \bullet & \mathbf{1} & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet \\ -1 & 1 & \bullet & \cdot & \bullet & \mathbf{1} & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & 1 & -1 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \mathbf{1} & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & 1 & \bullet & -1 & \bullet & -1 & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \mathbf{1} & 1 & \bullet & \cdot & -1 & \bullet \\ \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \mathbf{1} & \cdot & 1 & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \mathbf{1} & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \mathbf{1} & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \mathbf{1} & \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \bullet & \cdot & \alpha - 1 & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \mathbf{r_6} & \bullet \\ \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & -1 & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \mathbf{r_7} & \cdot \\ \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \mathbf{r_8} & \cdot \end{array} \right),$$

wobei r_i bzw. α Widerstandswerte bzw. der Verstärkungskoeffizient der gesteuerten Quelle sind. Die Spaltenmenge

$$S_1 = \{V_3, V_5, V_6, V_7, I_1, I_3, I_5, I_8\}$$

ist eine Basis von $\mathcal{M}_C(K)$ und $S \setminus S_1$ ist eine Basis von $\mathcal{M}_C(M)$. (Die entsprechenden generisch linear unabhängigen Spalten von K bzw. M sind in der obigen Matrix fett dargestellt.)

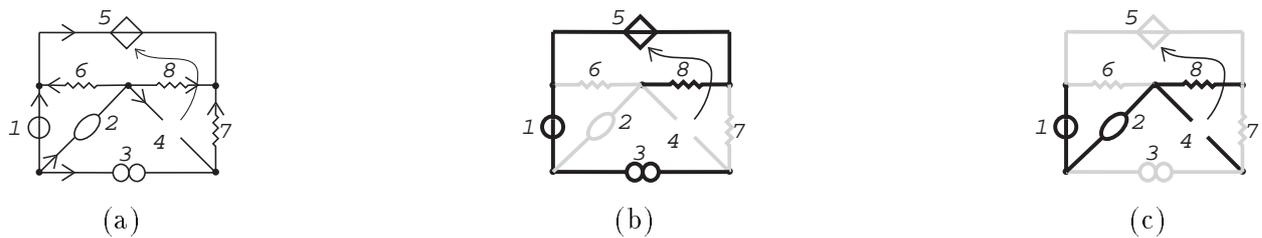


Fig. 2: (a) Das in Beispiel 3.3 betrachtete NW aus [29]. Dieses NW hat ein PCT (t_1, t_2) . Die Zweige von t_1 sind in (b) fett, die von t_2 in (c).

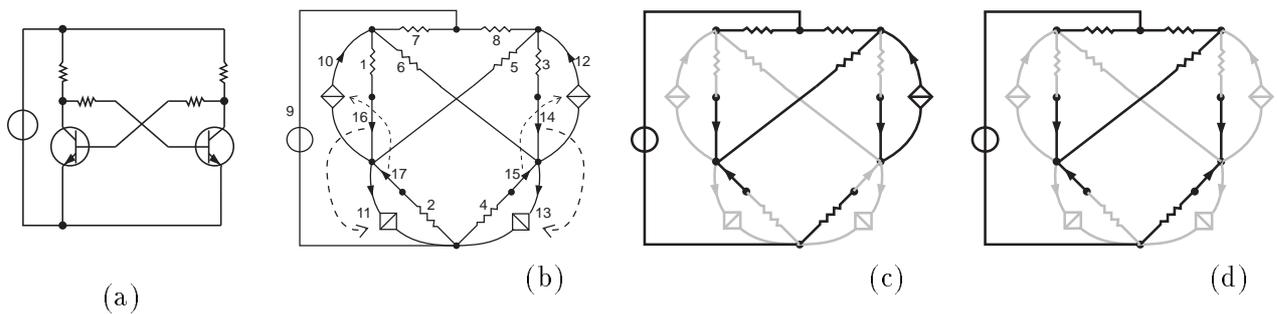


Fig. 3: Illustration von Beispiel 3.4. (a) Flip-Flop Netzwerk. (b) NW aus (a) nach Ersetzung der Transistoren durch ein Ebers-Moll Modell. Dieses NW hat ein PCT (t_1, t_2) . Die Zweige von t_1 sind in (c) fett, die von t_2 in (d).

Nach Theorem 3.2 hat das NW ein PCT (t_1, t_2) mit

$$t_1 = \{1, 3, 5, 8\},$$

$$t_2 = \{1, 2, 4, 8\}.$$

Dieses PCT ist in Fig. 2(b) und (c) illustriert. Man beachte, daß das PCT gefunden wurde, ohne die gesteuerte Quelle durch ein Ersatznetzwerk aus Widerständen und Nullator-Norator Paaren zu ersetzen. (Die in [29, 2.3.17] vorgeschlagene Ersetzung hätte die Zweigzahl verdoppelt !) \square

3.4 Beispiel: Für Fig. 3(b) dargestellte NW sei ein PCT gesucht. Die Matrix $B(p)$ aus den

4 Generisch eindeutige Lösbarkeit resistiver Netzwerke

In diesem Abschnitt wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die generisch eindeutige Lösbarkeit resistiver NW angegeben. Diese Bedingung wird mit Hilfe von Spaltenmatroiden von Untermatrizen der in den ZSZSG (4) vorkommenden Matrizen ausgedrückt. Eine Formulierung mittels PCT wird ebenfalls angegeben.

Daneben wird als eigenständiges Ergebnis eine neue Klasse parameterabhängiger Matrizen angegeben, deren maximaler mit ihrem Term-Rang übereinstimmt.

Das folgende Theorem ist das Hauptergebnis dieses Abschnitts.

4.1 Theorem: \mathcal{N} sei ein resistives NW mit den ZSZSG (4), das die folgende Voraussetzung erfüllt.

- (B) Es gibt eine disjunkte Zerlegung $Z_1 \cup Z_2$ der Zweigmengensmenge von \mathcal{N} so daß die Aussagen (B-1) bis (B-3) gelten.
- (B1) Für die Zweigmengensmenge Z_c jeder Zusammenhangskomponente von \mathcal{N} gilt entweder $Z_c \subseteq Z_1$ oder $Z_c \subseteq Z_2$.
- (B2) g_1 und g_2 seien die Zweige eines Gyrotors von \mathcal{N} . Dann gilt entweder $g_1 \in Z_1$ und $g_2 \in Z_2$, oder $g_1 \in Z_2$ und $g_2 \in Z_1$.
- (B3) t_1, \dots, t_w seien die w Zweige eines idealen w -Wicklungs-Übertragers von \mathcal{N} . Dann gilt entweder $\{t_1, \dots, t_w\} \subseteq Z_1$ oder $\{t_1, \dots, t_w\} \subseteq Z_2$.

Unter den angegebenen Voraussetzungen sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) \mathcal{N} ist generisch eindeutig lösbar.
- (ii) $\mathcal{M}_C(K) \vee \mathcal{M}_C(M) = (S, 2^S)$.

Falls \mathcal{N} zusätzlich zu den angegebenen Voraussetzungen auch die Bedingung (A) in Definition 3.1 erfüllt, dann sind die Aussagen (i) und (ii) auch äquivalent zu der folgenden.

- (iii) \mathcal{N} hat ein PCT. □

Es ist offensichtlich, daß (B) nur dann eine Einschränkung für die Topologie von \mathcal{N} darstellt, wenn \mathcal{N} tatsächlich Gyrotoren enthält. Bevor Theorem 4.1 bewiesen wird, werden einige Beispiele angegeben. Diese behandeln NW mit Gyrotoren, von denen keines ein PCT im Sinne von [29] hat, die aber alle ein PCT im Sinne von Definition 3.1 haben.

4.2 Beispiel: Das NW aus Fig. 4(a) hat das PCT $(\{2, 4\}, \{1, 3\})$, erfüllt die Voraussetzungen von Theorem 4.1, und ist deshalb generisch eindeutig lösbar. □

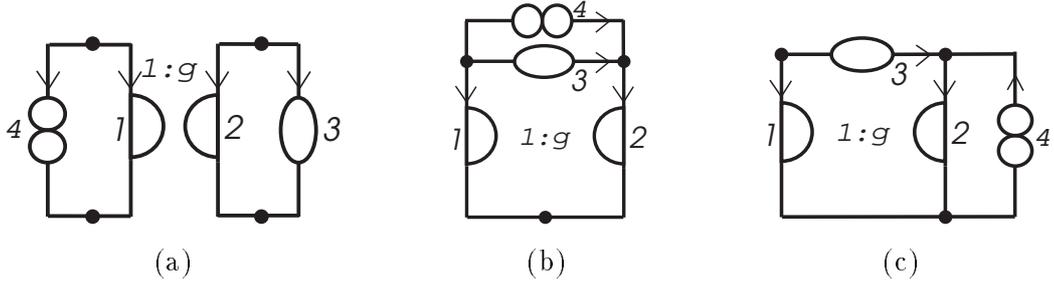


Fig. 4: NW aus den Beispielen 4.2 bis 4.4. Keines dieser NW hat ein PCT im Sinne von [29], aber alle haben ein PCT im Sinne von Definition 3.1. Das NW aus (a) genügt den Voraussetzungen von Theorem 4.1 und ist deshalb generisch eindeutig lösbar. Die NW aus (b) und (c) genügen den Voraussetzungen von Theorem 4.1 nicht. Das NW aus (c) ist und das NW aus (b) ist nicht generisch eindeutig lösbar.

4.3 Beispiel: Das NW aus Fig. 4(b) hat ebenfalls das PCT $(\{2, 4\}, \{1, 3\})$, erfüllt aber die Voraussetzungen von Theorem 4.1 nicht. Die Matrix

$$B(p) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \hline 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & g & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -g & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

aus den ZSZSG (4) des NW ist singular, und das NW ist deshalb nicht generisch eindeutig lösbar. \square

4.4 Beispiel: Das NW aus Fig. 4(c) hat das PCT $(\{1, 4\}, \{2, 3\})$, erfüllt aber die Voraussetzungen von Theorem 4.1 nicht. Die Matrix

$$B(p) = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & g & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -g & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

aus den ZSZSG (4) des NW ist trotzdem regulär, und das NW ist deshalb generisch eindeutig lösbar. \square

Schließlich genügen die in Fig. 2 und Fig. 3 angegebenen NW aus den Beispielen 3.3 und 3.4 den Voraussetzungen von Theorem 4.1 und sind generisch eindeutig lösbar.

Die Idee des Beweises der Äquivalenz der Aussagen (i) und (ii) im oben angegebenen Theorem besteht darin, zu zeigen, daß

$$\mathcal{M}_C \begin{pmatrix} K \\ M \end{pmatrix} = \mathcal{M}_C(K) \vee \mathcal{M}_C(M) \quad (8)$$

für die ZSZSG (4) der betrachteten NW gilt. Diese Identität kann folgendermaßen interpretiert werden: Sind K' bzw. M' $b \times b$ -Untermatrizen von K bzw. M vom generischen Rang b , die disjunkte Spaltenmengen haben, so hat $\begin{pmatrix} K \\ M \end{pmatrix}$ den generischen Rang $2b$. Hat umgedreht $\begin{pmatrix} K \\ M \end{pmatrix}$ den generischen Rang $2b$, so gibt es derartige Matrizen K' und M' .

Falls im Netzwerk keine Übertrager und keine Gyrotoren vorhanden sind, so beruht der Beweis der Identität (8) darauf, daß sich verschiedene, von Null verschiedene Summanden in der Entwicklung von $\det \begin{pmatrix} K \\ M(p) \end{pmatrix}$ nach den Zeilen von $M(p)$ nicht für alle $p \in \mathbb{R}^k$ herauskürzen können. (Siehe dazu [23] und Proposition 4.6 weiter unten.)

Falls im Netzwerk Übertrager vorhanden sind, dann enthält die Matrix $M(p)$ einige Parameter mehrfach, und verschiedene Summanden der Entwicklung von $\det \begin{pmatrix} K \\ M(p) \end{pmatrix}$ nach den Zeilen von $M(p)$ können sich herauskürzen. Durch Ausnutzung der Blockstruktur der Matrix K werden wir allerdings in Lemma 4.8 zeigen, daß sich zumindest einer der von Null verschiedenen Summanden nicht herausgekürzen läßt. Das bedeutet, daß es im Hinblick auf generische Lösbarkeit nicht wichtig ist, ob Wicklungsverhältnisse, die in der VCR sowohl als Koeffizienten einer Spannung als auch als Koeffizienten eines Stromes auftreten (siehe Tab. 1) als exakt gleich oder voneinander unabhängig betrachtet werden.

Falls das betrachtete NW Gyrotoren enthält, dann zerfallen die Blöcke von K wegen (B-1) selbst wieder in Blöcke. Nach Umordnen der nun 4 Blöcke von K gelingt der Beweis von (8) auf dieselbe Art und Weise wie im Falle von Übertragern. Anschaulich läßt sich dieses Umordnen der Blöcke zumindest für den Fall, daß einer der beiden durch die Zweigmengen Z_1 und Z_2 induzierten Untergraphen des ungerichteten NW Graphen des betrachteten NW planar ist, erklären. In diesem Fall entspricht das Umordnen der Dualisierung des planaren Unternetzwerkes. Dabei gehen wegen (B-2) Gyrotoren in ideale Übertrager über, und im NW vorkommende Übertrager bleiben wegen (B-3) Übertrager.

Der Beweis von (8) wird nun schrittweise geführt, und zunächst werden einige Begriffe definiert.

4.5 Definition: $B: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sei eine parameterabhängige $m \times n$ Matrix, $m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ein Term von B ist eine Menge $T \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$, die die Eigenschaft hat, daß

$$(r = r' \vee c = c') \implies (r, c) = (r', c')$$

für alle Paare $(r, c), (r', c') \in T$ gilt, d.h., zwei verschiedene Elemente von T gehören weder zur selben Zeile, noch zur selben Spalte von B . (Im Falle $\min\{m, n\} = 0$ ist also $T = \emptyset$ der einzige Term von B .)

Der Term T von B heißt verschieden von Null, falls es ein $p \in \mathbb{R}^k$ gibt, so daß $B(p)_{r,c} \neq 0$ für alle $(r, c) \in T$ gilt, er heißt voll, falls $|T| = \min\{m, n\}$. Die maximale Kardinalität eines von Null verschiedenen Terms von B heißt Term-Rang von B und wird mit $\text{rank}_t(B)$ bezeichnet. $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ heißt Exponent des von Null verschiedenen Terms T von B , falls $\prod_{(r,c) \in T} B(p)_{r,c} = \lambda \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

Es seien nun $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+q}, \mathbb{R}^m)$ eine $m \times (m+q)$ -Matrix und $B: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+q}, \mathbb{R}^q)$ eine parameterabhängige $q \times (m+q)$ -Matrix, $m, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ein Term von (A, B) ist ein voller Term $T = \{(r_1, c_1), (r_2, c_2), \dots, (r_q, c_q)\}$ von B . Der Term T von (A, B) heißt verschieden von Null, falls T als Term von B verschieden von Null ist und die Untermatrix von A aus den Spalten $\{1, 2, \dots, m+q\} \setminus \{c_1, \dots, c_q\}$ regulär ist.

Falls ein von Null verschiedener Term T von (A, B) als Term von B einen Exponenten hat, dann wird dieser Exponent auch Exponent des Terms T von (A, B) genannt. \square

Das folgende Resultat beweist die Identität (8) bereits für den Fall, daß \mathcal{N} weder ideale Übertrager, noch Gyratoren enthält und wird auch im Beweis des allgemeinen Falles benutzt.

4.6 Proposition: Es seien $m, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+q}, \mathbb{R}^m)$ eine $m \times (m+q)$ -Matrix und $B: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+q}, \mathbb{R}^q)$ eine parameterabhängige $q \times (m+q)$ -Matrix, die die folgenden Eigenschaften hat.

- (i) Jedes Element von $B(p_1, \dots, p_k)$ ist entweder eine reelle Konstante, oder ist gleich dem Produkt aus einem Parameter p_j und einer reellen Konstante.
- (ii) Jede Zeile von $B(p_1, \dots, p_k)$ enthält höchstens eine von Null verschiedene Konstante.
- (iii) Jeder Parameter p_j tritt in $B(p_1, \dots, p_k)$ höchstens einmal auf.

Unter den angegebenen Voraussetzungen gilt, daß zwei von Null verschiedene Terme von (A, B) vom selben Exponenten identisch sind. \square

Beweis: Es seien $T = \{(r_1, c_1), (r_2, c_2), \dots, (r_q, c_q)\}$ und $T' = \{(r_1, c'_1), (r_2, c'_2), \dots, (r_q, c'_q)\}$ zwei solche Terme von (A, B) und ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $c_1 \neq c'_1$. Falls $B(p)_{r_1, c_1}$ eine von Null verschiedene Konstante ist, dann enthält $B(p)_{r_1, c'_1}$ wegen (ii) einen Parameter. Dieser kann wegen (iii) nicht in $\prod_{n=1}^q B(p)_{r_n, c_n}$ auftreten. Widerspruch.

Ist jedoch $B(p)_{r_1, c_1}$ keine von Null verschiedene Konstante, dann enthält $B(p)_{r_1, c_1}$ einen Parameter, und dieser kann wegen (iii) nicht in $\prod_{n=1}^q B(p)_{r_n, c'_n}$ auftreten. Widerspruch. \square

Das folgende Lemma ermöglicht es, den maximalen Rang bestimmter parameterabhängiger Matrizen durch die Berechnung ihrer Term-Ränge, d.h. durch einen polynomialen Algorithmus, zu ermitteln. In diesem Bericht wird es auf Untermatrizen der Matrix $M(p)$ aus (4) angewendet.

4.7 Lemma: $B: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sei eine parameterabhängige $m \times n$ Matrix, die folgende Eigenschaften hat.

- (i) Jedes Element von $B(p_1, \dots, p_k)$ ist entweder eine reelle Konstante, oder ist gleich dem Produkt aus einem Parameter p_j und einer reellen Konstante.
- (ii) Falls $B(p_1, \dots, p_k)_{i,j}$ einen Parameter enthält, der in $B(p_1, \dots, p_k)$ mehrfach auftritt, dann tritt im verbleibenden Teil der i ten Zeile oder im verbleibenden Teil der j ten Spalte kein in $B(p_1, \dots, p_k)$ mehrfach auftretender Parameter auf.

(iii) Falls $B(p_1, \dots, p_k)_{i,j}$ eine von Null verschiedene Konstante ist, dann tritt im verbleibenden Teil der i ten Zeile oder im verbleibenden Teil der j ten Spalte weder eine von Null verschiedene Konstante, noch ein in $B(p_1, \dots, p_k)$ mehrfach auftretender Parameter auf.

Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\max_{p \in \mathbb{R}^k} \text{rank } B(p) = \text{rank}_t(B). \quad \square$$

Beweis: Die Relation $\max_{p \in \mathbb{R}^k} \text{rank}(B(p)) \leq \text{rank}_t(B)$ ist bekannt [34, Lemma 5.3.1].

Mit der Abkürzung $r = \text{rank}_t(B)$ wird im folgenden gezeigt, daß $r \leq \max_{p \in \mathbb{R}^k} \text{rank}(B(p))$ gilt.

- (a) Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m = n = r$ annehmen.
- (b) Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß alle Parameter p_1 bis p_k mehr als einmal auftreten.

Um das zu sehen, nimmt man an, daß genau die Parameter p_1 bis p_d in $B(p_1, \dots, p_k)$ höchstens einmal auftreten. Weil B den Term-Rang r hat, gibt es wenigstens einen vollen von Null verschiedenen Term von B .

α sei der Exponent eines solchen vollen von Null verschiedenen Terms von B , der den Ausdruck $\sum_{i=1}^d \alpha_i$ unter allen vollen von Null verschiedenen Termen von B minimiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{d_1} = 1$ und $\alpha_{d_1+1} = \dots = \alpha_d = 0$ annehmen.

Offenbar übersteigt der maximale Rang der parameterabhängigen Matrix

$$B_1: (p_1, \dots, p_{d_1}, p_{d+1}, \dots, p_k) \mapsto B(p_1, \dots, p_{d_1}, 0, \dots, 0, p_{d+1}, \dots, p_k)$$

nicht den von B , und $(1, 1, \dots, 1) \in \{1\}^{d_1}$ ist der Exponent eines von Null verschiedenen Terms von B_1 , der den Ausdruck $\sum_{i=1}^{d_1} \alpha_i$ unter allen von Null verschiedenen Termen von B_1 minimiert.

Folglich tritt der Ausdruck $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{d_1}$ in allen von Null verschiedenen Summanden der Laplace-Entwicklung von $\det B_1(p_1, \dots, p_{d_1}, p_{d+1}, \dots, p_k)$ als Faktor auf, und man kann annehmen, daß $B_1(p_1, \dots, p_{d_1}, p_{d+1}, \dots, p_k)$ die Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} p_1 & * & \cdots & * & \\ * & p_2 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ * & * & \cdots & p_{d_1} & \\ \hline & * & & & B_2(p_{d+1}, \dots, p_k) \end{array} \right)$$

hat. Man sieht leicht, daß voller maximaler Rang von B_2 vollen maximalen Rang von B nach sich zieht und daß sich die Eigenschaften (i) bis (iii) von B auf B_2 übertragen.

Nun kann man die obige Argumentation auf B_2 anstatt auf B anwenden, usw., bis jeder der auftretenden Parameter mehrfach auftritt.

- (c) Nun sei α der Exponent eines vollen von Null verschiedenen Terms T von B , der den Ausdruck $\sum_{i=1}^k \alpha_i$ unter allen vollen von Null verschiedenen Termen von B maximiert. Man kann nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$B(p) = \left(\begin{array}{ccc|c} p_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & p_1 & \\ & & & p_2 \\ & & & \ddots \\ & & & & p_2 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & p_k \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & p_k \\ \hline & & & & & & * \\ & & & & & & B_4(p) \end{array} \right)$$

und daß der betrachtete Term T aus den Diagonalelementen von $B(p)$ besteht. Man beachte, daß die obere linke Untermatrix von B wegen (ii) und (iii) eine Diagonalmatrix ist und daß keiner der vollen von Null verschiedenen B_4 -Terme ein Element enthält, das zu einem Parametereintrag gehört.

- (d) Es sei nun T' ein voller von Null verschiedener Term von B vom selben Exponenten α , der ein Element aus der oberen rechten bzw. unteren linken Untermatrix von $B(p)$ enthält, z.B. in der j ten Spalte bzw. Zeile. Wegen (c) ist $B(p)_{j,j}$ eine Konstante, und der verbleibende Teil der j ten Zeile bzw. Spalte von B ist wegen (iii) gleich Null. Also gilt $\det B(p) = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot \det B_4(p)$.
- (e) Jeder vom Diagonal-Term verschiedene volle Term von B_4 , der von Null verschieden ist und den Exponenten $(0, \dots, 0)$ hat, würde ein Element enthalten, das zu einer Konstante außerhalb der Diagonale von B_4 gehört. Wegen (iii) kann diese Konstante nur Null sein. \square

Nun wird (8) auch für die NW, die ideale Übertrager oder Gyrotoren enthalten, gezeigt.

4.8 Lemma: Für $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ seien $k_i \times n_i$ -Matrizen $K_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_i}, \mathbb{R}^{k_i})$ und parameterabhängige $m_i \times n_i$ -Matrizen $M_i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_i}, \mathbb{R}^{m_i})$ sowie eine parameterabhängige $m_0 \times n_0$ -Matrix $M_0: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R}^{m_0})$ gegeben, wobei $n_0 = \sum_{i=1}^r n_i$ gilt.

Die Matrizen M_i haben für $i \in \{0, 1, \dots, r\}$ die Eigenschaften (i)-(iii) von B in Prop. 4.6. Außerdem enthält die Matrix $M_0(p)$ keinen Parameter p_j , der in einer der anderen Matrizen $M_i(p)$ auftritt.

Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\mathcal{M}_C \left(\begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \\ \dots \\ K_r \\ \hline M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_r \\ \hline M_0 \end{array} \right) = \mathcal{M}_C \left(\begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \\ \dots \\ K_r \end{array} \right) \vee \mathcal{M}_C \left(\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_r \\ \hline M_0 \end{array} \right). \quad \square$$

Beweis: Es bezeichne M die Matrix des Matroides auf der linken Seite der behaupteten Identität, K sei die Matrix des ersten Matroides in der Summe auf der rechten Seite, und M' sei die Matrix des zweiten Matroides auf der rechten Seite.

Nach [34, Statement 11.2.1] ist jede in $\mathcal{M}_C(M)$ unabhängige Menge X auch unabhängig in $\mathcal{M}_C(K) \vee \mathcal{M}_C(M')$.

Es bleibt zu zeigen, daß die Vereinigung $X_1 \cup X_2$ zweier disjunkter, in $\mathcal{M}_C(K)$ bzw. $\mathcal{M}_C(M')$ unabhängiger Mengen X_1 bzw. X_2 in $\mathcal{M}_C(M)$ unabhängig ist.

- (a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß M quadratisch ist und $|X_1| = \sum_{i=1}^r k_i$ und $|X_2| = \sum_{i=1}^r m_i$ gelten. Offenbar gibt es dann einen von Null verschiedenen Term von (K, M') .
- (b) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $m_0 = 0$ annehmen, d.h., daß M_0 garnicht vorkommt. (Um das zu sehen, wendet man die Argumentation vom Teil (b) des Beweises von Lemma 4.7 an. Die einzige Änderung besteht darin, daß man Terme von (K, M') anstelle von Termen von B betrachtet.)
- (c) Die vereinfachenden Annahmen in (a) und (b) können gleichzeitig gemacht werden. Insbesondere hat M nach Umordnen der Zeilen die Form

$$M(p) = \left(\begin{array}{c} \boxed{K_1} \\ \boxed{M_1(p)} \\ \dots \\ \boxed{K_2} \\ \boxed{M_2(p)} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \boxed{K_r} \\ \boxed{M_r(p)} \end{array} \right).$$

Offensichtlich sind die Blöcke $\begin{pmatrix} K_i \\ M_i(p) \end{pmatrix}$ quadratisch und jeder von Null verschiedene Term von (K, M') ist die disjunkte Vereinigung von Null verschiedener Terme von (K_i, M_i) . Wegen (a) gibt es wenigstens einen solchen von Null verschiedenen Term von (K, M') , und folglich sind nach Prop. 4.6 die Blöcke $\begin{pmatrix} K_i \\ M_i \end{pmatrix}$ für alle i generisch regulär. \square

Beweis (von Theorem 4.1): Wenn \mathcal{N} generisch eindeutig lösbar ist, dann ist $p \mapsto \det \begin{pmatrix} K \\ M(p) \end{pmatrix}$ ein von Null verschiedenes Polynom. Insbesondere gibt es einen von Null verschiedenen Term von (K, M) , und (ii) gilt wegen (8) und Lemma 4.7.

und

$$M_2 = \begin{pmatrix} G_{21} & G_{22} & \\ & & T_{12} \\ & T_{21} & \end{pmatrix}$$

gelten. Offenbar hat M die Eigenschaften von B in Lemma 4.7, und M_i und K_i erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 4.8. Insbesondere enthalten wegen (B-2) und (B-3) weder $(G_{11}|G_{12})$, noch $(G_{21}|G_{22})$, $\begin{pmatrix} T_{11} & \\ & T_{22} \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} & T_{12} \\ T_{21} & \end{pmatrix}$ irgendeinen Parameter mehrfach.

Wegen Lemma 4.8 gilt also (8), und folglich ist $\begin{pmatrix} K \\ M \end{pmatrix}$ generisch regulär.

Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus Theorem 3.2. \square

5 Generisch eindeutige Lösbarkeit, Komplexitätsordnung und Anfangswertkoordinaten dynamischer Netzwerke

In diesem Abschnitt wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die generisch eindeutige Lösbarkeit dynamischer NW angegeben. Außerdem werden diejenigen Teilmengen der C-Spannungen und L-Ströme, die ein GFSSC bilden, und diejenigen NW, deren ZSZSG vom generischen Index 1 sind, charakterisiert. Eine Vorschrift zur Modifikation eines NW, die ein NW mit ZSZSG vom generischen Index 1 liefert, wird ebenfalls angegeben.

Zunächst geht es im folgenden Theorem um Lösbarkeit.

5.1 Theorem: (4) seien die ZSZSG eines NW \mathcal{N} , das die Bedingung (B) in Theorem 4.1 erfüllt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) \mathcal{N} ist generisch eindeutig lösbar.

(ii) Das NW, das man aus \mathcal{N} durch Ersetzung aller Reaktanzen durch Widerstände erhält, ist generisch eindeutig lösbar.

(iii) $\mathcal{M}_C(K) \vee \mathcal{M}_C(M) \vee \mathcal{M}_C(A_{LC} + B_{LC}) = (S, 2^S)$.

Falls das NW \mathcal{N} zusätzlich die Bedingung (A) in Definition 3.1 erfüllt, dann sind die Aussagen (i) bis (iii) auch zur folgenden Aussage (iv) äquivalent.

(iv) \mathcal{N} hat ein PCT. \square

Beweis: Zunächst folgt aus Prop. 4.6 und Lemma 4.7, daß $\mathcal{M}_C\left(\begin{smallmatrix} M \\ sA_{LC} + B_{LC} \end{smallmatrix}\right) = \mathcal{M}_C(M) \vee \mathcal{M}_C(sA_{LC} + B_{LC})$ und $\mathcal{M}_C(sA_{LC} + B_{LC}) = \mathcal{M}_C(A_{LC} + B_{LC})$ für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten. Außerdem ist die Äquivalenz von (ii) und (iv) gerade Theorem 4.1.

(i) \iff (iii) Wegen Lemma 4.8 gibt es genau dann ein $p \in \mathbb{R}^k$ und ein $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so daß $sA(p) + B(p)$ regulär ist, wenn $\mathcal{M}_C(K) \vee \mathcal{M}_C\left(\begin{smallmatrix} M \\ A_{LC} + B_{LC} \end{smallmatrix}\right) = (S, 2^S)$ gilt.

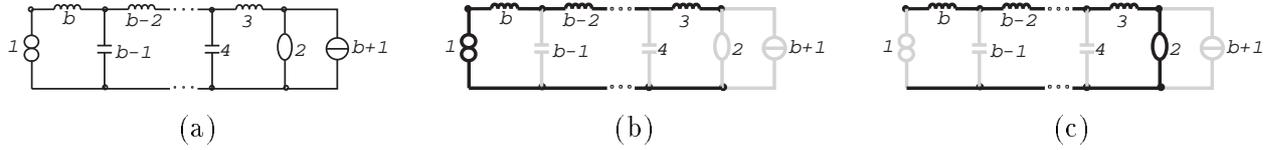


Fig. 5: Illustration von Beispiel 5.2. (a) NW aus [33]. Dieses NW hat ein PCT (t_1, t_2) . Die Zweige von t_1 sind in (b) fett, die von t_2 in (c).

(iii) \iff (ii) Nach Lemma 4.8 ist (iii) dazu äquivalent, daß $A + B$ generisch regulär ist. Es sei $f: \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}: (p_1, \dots, p_k) \mapsto (q_1, \dots, q_k)$, so daß $q_i = 1/p_i$ für alle die i , für die p_i einen Kapazitätswert repräsentiert, und $q_i = p_i$ für alle anderen i . Dann sind $(A(f(p)) + B(f(p))) \binom{v}{i} = 0$, bis auf Multiplikation einiger Zeilen mit von Null verschiedenen reellen Zahlen, ZSZSG desjenigen NW, das man aus \mathcal{N} durch Ersetzen aller Reaktanzen durch Widerstände erhält. Offenbar ist die generische Regularität von $A + B$ zu der von $(A \circ f + B \circ f)$ äquivalent. \square

5.2 Beispiel: Fig. 5(a) zeigt ein NW aus [33]. Es sei L die Menge der Induktivitäts-Zweige. Dann ist offenbar $(L \cup \{1\}, L \cup \{2\})$ ein PCT; siehe Fig. 5(b) und (c). Wegen Theorem 5.1 ist das NW also generisch eindeutig lösbar. \square

5.3 Beispiel: Das in Fig. 6(a) (Seite 39) dargestellte NW ist ein elektrisches Ersatznetzwerk eines frequenzanalogen piezoelektrischen Kraftsensors [40, 41]. Die Zweigmengen

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 5, \dots, 10\}, \\ &\{11, 12, \dots, 16\} \end{aligned}$$

bzw.

$$\{3, 4, 17, \dots, 10N + 16\}$$

repräsentieren einen elektrischen Oszillator, zwei piezoelektrische Wandler bzw. einen mechanischen Balken. Offenbar ist (t_1, t_2) mit

$$\begin{aligned} t_1 &= t \cup \{10\}, \\ t_2 &= t \cup \{9\}, \\ t &= \{3, 5, 7, 8, 16, 19\} \cup \bigcup_{n=1}^N (10n + \{7, 8, 10, 11, 13, 15\}) \end{aligned}$$

ein PCT, und das NW ist deshalb generisch eindeutig lösbar. (Es seien (4) die ZSZSG des betrachteten NW. Theoretisch könnte man die generisch eindeutige Lösbarkeit des NW auch durch symbolische Berechnung des Ranges von $A(p) + B(p)$ feststellen. Das wurde für ein NW mit $N = 8$ auf einer UltraSparc-1 Workstation (167 MHz CPU-Takt, 256 MB RAM) unter *Mathematica* mit dem Befehl `RowReduce` versucht. Die Rechnung brach nach über 22 Stunden Rechenzeit mit der Meldung `Out of Memory`. ab.) \square

Im nächsten Theorem werden diejenigen Teilmengen der C-Spannungen und L-Ströme charakterisiert, die ein GFSSC bilden. Zuvor wird die Definition eines NSF auf PCT übertragen.

5.4 Definition: Ein PCT (t_1, t_2) eines NW \mathcal{N} heißt normales Paar konjugierter Bäume (NPCT), falls es unter allen PCT von \mathcal{N} die Summe aus der Anzahl der C-Zweige in den Bäumen und der Anzahl der L-Zweige außerhalb der Bäume maximiert, d.h. falls $|t_1 \cap C| + |L \setminus t_1|$ den Wert

$$\max \left\{ |s_1 \cap C| + |L \setminus s_1| \mid (s_1, s_2) \text{ ist ein PCT von } \mathcal{N} \right\} \quad (11)$$

annimmt. □

5.5 Theorem: (4) seien die ZSZSG eines generisch eindeutig lösbaren NW \mathcal{N} , das die Bedingung (B) in Theorem 4.1 erfüllt. Außerdem seien C bzw. L die Mengen der C-Zweige bzw. L-Zweige von \mathcal{N} .

Unter diesen Voraussetzungen gelten die folgenden Aussagen.

(i) Die generische Komplexitätsordnung von \mathcal{N} ist

$$\max \left\{ |(V_C \cup I_L) \cap \mathcal{B}_3| \mid \mathcal{B}_1, S \setminus (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_3), \text{ bzw. } \mathcal{B}_3 \text{ sind paarweise disjunkte Basen von } \mathcal{M}_C(K), \mathcal{M}_C(M), \text{ bzw. } \mathcal{M}_C(A_{LC} + B_{LC}). \right\}. \quad (12)$$

Falls die Basen \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_3 in (12) das Maximum liefern, dann ist $(V_C \cup I_L) \cap \mathcal{B}_3$ ein GFSSC.

(ii) Falls das NW \mathcal{N} zusätzlich die Bedingung (A) in Definition 3.1 erfüllt, dann ist seine generische Komplexitätsordnung gleich dem Wert von (11). Falls (t_1, t_2) ein NPCT ist, dann ist $V_{C \cap t_1} \cup I_{L \setminus t_1}$ ein GFSSC. □

5.6 Beispiel: Das in Beispiel 5.2 für das NW aus Fig. 5(a) gefundene PCT ist das einzige PCT dieses NW, und folglich auch ein NPCT. Es gilt nämlich für jedes PCT (t'_1, t'_2) des betrachteten NW $b \in t'_2$ und folglich $b-1 \notin t'_1$. Außerdem gilt $b-2 \in t'_2$, da jeder vollständige Baum zusammenhängend ist. Daraus folgt $b-3 \notin t'_1$ usw. und schließlich $t_1 = t'_1$ und $t_2 = t'_2$. Folglich ist die generische Komplexitätsordnung des NW aus Fig. 5(a) gleich 0. □

Einen Beweis des angegebenen Theorems könnte man durch direktes Umstellen der ZSZSG (4) des NW \mathcal{N} erhalten. Eine solche Behandlung parameterabhängiger Scharen von größerem generischen Index als 1 hat sich bei ähnlichen Problemen stets als umständlich und langwierig herausgestellt [1,20,23]. Das folgende Ergebnis erlaubt es, den Beweis von Theorem 5.5 durch Behandlung einer konstanten Schar vom Index 1 zu führen.

5.7 Proposition: Für die parameterabhängige DAE (3) sei angenommen, daß die $n \times n$ -Matrizen $A, B: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \in C^\omega$ analytisch vom Parameter abhängen und (A, B) eine generisch reguläre Schar vom generischen Index μ ist.

Außerdem sei $q: I \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^\mu$ eine μ mal stetig differenzierbare Abbildung und $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, zusammenhängend und nichtleer.

Es seien weiter

$$r = \max_{p \in \mathbb{R}^k} \deg \left(s \mapsto \det (sA(p) + B(p)) \right) \quad (13)$$

sowie $p_0 \in \mathbb{R}^k$ derart, daß $(A(p_0), B(p_0))$ regulär ist und für $p = p_0$ in (13) das Maximum angenommen wird.

Dann ist jedes vollständige System von Anfangswertkoordinaten der DAE $A(p_0)\dot{x} + B(p_0)x = 0$ ein vollständiges System generischer Anfangswertkoordinaten der parameterabhängigen DAE (3). \square

Beweis: Es sei $s_0 \in \mathbb{R}$ derart, daß $s_0A(p_0) + B(p_0)$ regulär ist, was wegen $A, B \in C^\omega$ die generische Regularität von $s_0A + B$ nach sich zieht. Mit der Vereinbarung

$$M(p) = \text{adj} \left(s_0A(p) + B(p) \right) A(p)$$

folgt aus (13), den Voraussetzungen an p_0 und der Normalform (1) (für festes p), daß es eine offene dichte Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ mit $p_0 \in U$ gibt, so daß

$$\begin{aligned} r &= \dim \text{im } M(p)^n, \\ \mathbb{R}^n &= \text{im } M(p)^n \oplus \ker M(p)^n \end{aligned} \quad (14)$$

für alle $p \in U$ gelten. (Es gilt $(s_0 \text{id} + N)^{-1} = \sum_{i=0}^m (-s)^i N^i$ und deshalb auch $((s_0 \text{id} + N)^{-1} N)^m = N^m ((s_0 \text{id} + N)^{-1})^m = 0$ für jede nilpotente $m \times m$ Matrix N .)

Es seien nun m_{i_1}, \dots, m_{i_r} Spalten von $M(\cdot)^n$, für die

$$\text{im } M(p)^n = \text{span} \{ m_{i_1}(p), \dots, m_{i_r}(p) \} \quad (15)$$

für $p = p_0$ gilt. Wegen $A, B \in C^\omega$ und (14) gibt es eine offene dichte Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ mit $p_0 \in U'$ derart, daß (15) sogar für alle $p \in U'$ gilt. Im folgenden wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U = U'$ angenommen.

Es gibt eine parameterabhängige $r \times r$ -Matrix $R: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r)$ und eine parameterabhängige $(n-r) \times (n-r)$ -Matrix $\tilde{N}: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-r}, \mathbb{R}^{n-r})$, so daß für alle $p \in U$ die Matrizen $R(p)$ regulär und $\tilde{N}(p)$ nilpotent sind und

$$T(p)^{-1} M(p) T(p) = \begin{pmatrix} R(p) & 0 \\ 0 & \tilde{N}(p) \end{pmatrix} \quad (16)$$

gilt [36]. Dabei ist $T: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine parameterabhängige $n \times n$ -Matrix, deren linke r Spalten gerade m_{i_1}, \dots, m_{i_r} sind und für die $T(p)$ für alle $p \in U$ regulär ist.

Nun wird die DAE (3) für ein $p \in U$ betrachtet und es wird angenommen, daß $\mathcal{Z} = \{1, 2, \dots, r\}$ das vollständige System von Anfangswertkoordinaten ist, um das es geht. Außerdem seien $A(p) = P \text{diag}(\text{id}_{\mathbb{R}^r}, N)Q$ und $B(p) = P \text{diag}(W, \text{id}_{\mathbb{R}^{n-r}})Q$ in Analogie zur Normalform (1).

Dann gilt $\mathcal{P}_t = Q^{-1} (\mathbb{R}^r \times \{ \sum_{i=0}^n (-N)^i (\text{id}_{\mathbb{R}^n} - \pi) P^{-1} D^i q(t) \})$, wobei \mathcal{P}_t die zu t gehörende Menge konsistenter Anfangswerte für (3) und $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der orthogonale Projektor auf $\text{span} \{ e_1, e_2, \dots, e_r \}$ ist. Folglich gilt $\pi \mathcal{P}_t = \mathbb{R}^r \times \{0\}^{n-r}$ genau dann, wenn die obere linke $r \times r$ -Untermatrix von Q^{-1} regulär ist. (Die Gültigkeit der Aussage, \mathcal{Z} sei ein vollständiges System

Es genügt nun zu zeigen, daß für beliebige paarweise disjunkte Basen $\mathcal{B}_1 = S_1$, $S \setminus (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_3)$ bzw. \mathcal{B}_3 von $\mathcal{M}_C(K)$, $\mathcal{M}_C(M)$ bzw. $\mathcal{M}_C(A_{LC} + B_{LC})$

$$\begin{aligned} V_C \cap \mathcal{B}_3 &= V_{C \cap t_2}, \\ I_L \cap \mathcal{B}_3 &= I_{L \setminus t_1} \end{aligned}$$

gelten. Da \mathcal{N} die Bedingung (A) in Definition 3.1 erfüllt, gilt $V_{L \cup C} \cup I_{L \cup C} \subseteq \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_3$. Dann folgen $V_C \cap \mathcal{B}_3 = V_C \setminus \mathcal{B}_1 = V_C \cap t_2 = V_{C \cap t_2}$ und $I_L \cap \mathcal{B}_3 = I_L \setminus \mathcal{B}_1 = I_L \setminus (t_1 + b) = I_L \setminus I_{t_1} = I_{L \setminus t_1}$ mit (5) und (6) aus Theorem 3.2 \square

Von besonderem Interesse sind NW, deren ZSZSG vom Index 1 sind, bei denen also alle C-Spannungen und alle L-Ströme zusammen ein vollständiges System von Anfangswertkoordinaten bilden. Das folgende Ergebnis charakterisiert solche NW. Außerdem wird eine Methode zur Modifikation eines beliebigen generisch eindeutig lösbaren NW angegeben, die ein NW liefert, dessen ZSZSG vom generischen Index 1 sind.

5.8 Korollar: (4) seien die ZSZSG eines NW \mathcal{N} , das die Bedingung (B) in Theorem 4.1 erfüllt. Außerdem seien C bzw. L die Mengen der C-Zweige bzw. L-Zweige von \mathcal{N} .

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) \mathcal{N} ist generisch eindeutig lösbar und vom generischen Index 1.
- (ii) Das NW, das man aus \mathcal{N} durch Ersetzung aller C-Zweige durch Spannungsquellen-Zweige und aller L-Zweige durch Stromquellen-Zweige erhält, ist generisch eindeutig lösbar.
- (iii) $S \setminus (V_C \cup I_L)$ ist eine Basis von $\mathcal{M}_C(K) \vee \mathcal{M}_C(M)$.
- (iv) $V_C \cup I_L$ ist ein GFSSC.

Falls das NW \mathcal{N} zusätzlich die Bedingung (A) in Definition 3.1 erfüllt, dann sind die obigen Aussagen auch äquivalent zu der folgenden Aussage.

- (v) \mathcal{N} hat ein PCT (t_1, t_2) mit $C \subseteq t_1$ und $L \cap t_1 = \emptyset$. \square

Beweis: Es ist klar, daß $\text{ind}_g(A, B) = 1$ genau dann gilt, wenn

$$|L \cup C| = \deg \left(s \mapsto \det(sA(p) + B(p)) \right) \quad (18)$$

für alle p aus einer offenen dichten Teilmenge von \mathbb{R}^k gilt. Die Äquivalenz zwischen (i), (iv) und (v) ist offensichtlich.

- (i) \implies (ii) Die aus den Spalten $S \setminus (V_C \cup I_L)$ bestehende Untermatrix von $\begin{pmatrix} K \\ M \end{pmatrix}$ ist wegen (18) generisch regulär, die Spaltenmenge $V_C \cup I_L$ von A_{LC} ist generisch linear unabhängig, alle anderen Spalten von A_{LC} enthalten nur Nullen, und das modifizierte NW ist genau dann generisch eindeutig lösbar, wenn $\begin{pmatrix} K \\ M \\ A_{LC} \end{pmatrix}$ generisch regulär ist.

(ii) \implies (iii) Die Spaltenmenge $S \setminus (V_C \cup I_L)$ von $\begin{pmatrix} K \\ M \end{pmatrix}$ ist generisch linear unabhängig, da die entsprechenden Spalten von A_{LC} nur Nullen enthalten, und die Behauptung folgt aus Lemma 4.8.

(iii) \implies (i) (18) gilt für alle p aus einer offenen dichten Teilmenge von \mathbb{R}^k , da die Spaltenmenge $S \setminus (V_C \cup I_L)$ von $\begin{pmatrix} K \\ M \end{pmatrix}$ wegen Lemma 4.8 generisch regulär ist und jedes von Null verschiedene Element von A_{LC} ein in $sA(p) + B(p)$ genau einmal auftretender Parameter ist. \square

5.9 Korollar: \mathcal{N} sei ein generisch eindeutig lösbares NW, das die Bedingungen (A) and (B) in Definition 3.1 und Theorem 4.1 erfüllt. Außerdem sei (t_1, t_2) ein NPCT von \mathcal{N} . $\tilde{\mathcal{N}}$ sei das NW, das man aus \mathcal{N} wie folgt erhält.

(i) In Reihe zu jedem C-Zweig von \mathcal{N} , der nicht in t_1 ist, wird ein R-Zweig oder ein L-Zweig eingefügt.

(ii) Parallel zu jedem L-Zweig von \mathcal{N} , der in t_1 ist, wird ein R-Zweig oder ein C-Zweig eingefügt.

Dann ist $\tilde{\mathcal{N}}$ generisch eindeutig lösbar und vom generischen Index 1. \square

Beweis: Das ist eine einfache Folgerung aus Kor. 5.8. \square

5.10 Beispiel: Das in Fig. 5(a) dargestellte NW ist für $b \geq 5$ nicht vom generischen Index 1. Das NW, das man durch Einfügen von Widerständen parallel zu jeder Induktivität und in Reihe zu jeder Kapazität erhält, ist nach Kor. 5.9 vom generischen Index 1. (Dagegen ist das NW, das man durch Einfügen von Widerständen in Reihe zu jeder Induktivität und parallel zu jeder Kapazität erhält, nicht vom generischen Index 1.) \square

5.11 Beispiel: Das in Beispiel 5.3 behandelte NW aus Fig. 6(a) (Seite 39) ist offenbar nicht vom generischen Index 1, da es einen L-Schnitt enthält. Allerdings ist nicht so einfach zu entscheiden, ob das in Beispiel 5.3 gefundene PCT normal ist. \square

6 Über die Position der Minoren maximalen Grades

Sowohl Proposition 2.1, als auch der Algorithmus aus [33] erfordern zur Berechnung des Index' der ZSZSG (4) eines NW die Berechnung der Grade aller $4b^2$ Minoren der Ordnung $2b - 1$ von $sA(p) + B(p)$. Das folgende Resultat zeigt, daß die Untersuchung von

$$(\rho - r)(2b - \rho)$$

Minoren ausreicht. (Es gilt $(\rho - r)(2b - \rho) \leq b^2$.) Dabei bedeuten ρ die Anzahl der Reaktanzen, b die Anzahl der Zweige, und r die generische Komplexitätsordnung des betrachteten NW.

6.1 Theorem: (4) seien die ZSZSG eines generisch eindeutig lösbaren NW \mathcal{N} , das die Bedingung (B) in Theorem 4.1 erfüllt, C bzw. L seien die Mengen der C -Zweige bzw. L -Zweige von \mathcal{N} .

\mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_3 seien Basen, die in (12) das Maximum liefern, und mit der Vereinbarung $r = |(V_C \cup I_L) \cap \mathcal{B}_3|$ gelte $r < |L \cup C|$.

Z sei die Menge der Zeilen von K und M in (4), d.h., $Z = \{1, 2, \dots, 2b - |L \cup C|\}$.

L_1 bzw. C_1 seien diejenigen Mengen von L -Zweigen bzw. C -Zweigen, die $V_C \setminus C_1 \cup I_L \setminus L_1 = (V_C \cup I_L) \cap \mathcal{B}_3$ erfüllen.

Dann ist der generische Index von \mathcal{N} gleich

$$1 - r + \max_{\substack{i \in V_{L_1} \cup I_{C_1} \\ j \in Z}} \max_{p \in \mathbb{R}^k} \deg \left(s \mapsto \text{adj}(sA(p) + B(p))_{i,j} \right). \quad \square$$

Beweis: Im folgenden werden die Bezeichnungen aus dem Beweis von Th. 5.5 benutzt, insbesondere aus (17). Außerdem sei

$$\text{adj}(sA(p) + B(p)) = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} r & r' & \\ \hline I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ \hline I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ \hline I_{31} & I_{32} & I_{33} \\ \hline I_{41} & I_{42} & I_{43} \\ \hline I_{51} & I_{52} & I_{53} \end{array} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} r \\ \} r' \\ \} r \\ \} r' \end{array},$$

wobei die Argumente s und p in allen Elementen fortgelassen wurden.

Es gilt

$$0 = s \begin{pmatrix} I_{31} \\ I_{41} \\ I_{51} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{33} \\ I_{43} \\ I_{53} \end{pmatrix} M_{11} \quad (19)$$

$$0 = - \begin{pmatrix} I_{32} \\ I_{42} \\ I_{52} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{33} \\ I_{43} \\ I_{53} \end{pmatrix} M_{12} \quad (20)$$

$$0 = -I_{21} + I_{23}M_{21} \quad (21)$$

$$0 = sI_{22}\Delta_2 + I_{23}M_{22} \quad (22)$$

$$0 = -I_{11} + I_{13}M_{21} \quad (23)$$

$$0 = sI_{12}\Delta_2 + I_{13}M_{22} \quad (24)$$

$$0 = s\Delta_1 I_{13} - I_{33} \quad (25)$$

$$0 = -I_{22} + I_{23}M_{12} \quad (26)$$

und

$$\det(sA(p) + B(p)) \text{id}_{\mathbb{R}^{2b-r-r'}} = M_{11}I_{13} + M_{12}I_{23} + M_2 \begin{pmatrix} I_{33} \\ I_{43} \\ I_{53} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Aus (19), (20), (21), (22), (23), und (24) folgt, daß die rechten $2b - r - r'$ Spalten von $\text{adj}(sA(p) + B(p))$ ein Element mit maximalem generischen Grad in s enthalten müssen. Da M_2 generisch regulär ist folgt aus (27), daß I_{13} oder I_{23} ein Element mit maximalem generischen Grad in s enthalten, wenn I_{33} , I_{43} , oder I_{53} ein solches Element enthalten. (Der maximale Grad ist wenigstens $r + 1$, da \mathcal{N} nach Kor. 5.8 wenigstens vom generischen Index 2 ist.)

Aus (25) und (27) folgt, daß I_{13} kein solches maximales Element enthält. \square

6.2 Beispiel: Das in Fig. 5(a) dargestellte NW ist vom generischen Index $b - 1$. Hier wird das allerdings lediglich für den Spezialfall $b = 5$ gezeigt. Wie bereits in Beispiel 5.10 gezeigt wurde, ist das Polynom $s \mapsto \det(sA(p) + B(p))$ eine von Null verschiedene Konstante. (Dabei sind A und B die Matrizen aus den ZSZSG (4) des NW.) Es gilt

$$sA(p) + B(p) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & sl_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & sc_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & sl_5 \end{pmatrix}$$

und die maximalen Grade in s der Elemente von $\text{adj}(sA(p) + B(p))$ sind

$$\begin{pmatrix} \cdot & 2 & \cdot & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bullet & \mathbf{2} & \bullet & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 & 2 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \bullet & \mathbf{1} & \bullet & \bullet & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 & 2 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Die nach Theorem 6.1 zu untersuchenden Minoren sind in der obigen Matrix fett. \square

7 Der generische Index eines RLCTG Netzwerkes ist nicht größer als 2

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die ZSZSG eines NW aus konstanten Quellen, Widerständen, Induktivitäten, Kapazitäten, idealen Übertragern und Gyrotoren (RLCTG NW) von nicht höherem generischen Index als 2 sind. Dazu werden zunächst der Begriff des NSF eingeführt und einige bekannte Resultate angegeben.

7.1 Definition: \mathcal{G} sei der ungerichtete NW Graph eines RLCTG NW \mathcal{N} . Es sei f ein vollständiger Wald von \mathcal{G} , der folgende Eigenschaften hat:

- (i) f enthält alle Spannungsquellen-Zweige und keinen Stromquellen-Zweig.
- (ii) f enthält genau $w - 1$ Zweige jedes idealen w -Wicklungs-Übertragers.
- (iii) f enthält von jedem G -Zweigpaar entweder beide oder keinen Zweig.

f heißt normaler vollständiger Wald (NSF) von \mathcal{N} , falls f unter allen vollständigen Wäldern von \mathcal{G} , die die obigen 3 Eigenschaften haben, die Summe aus der Anzahl der C -Zweige im Wald und der Anzahl der L -Zweige außerhalb des Waldes maximiert. \square

7.2 Theorem ([10, 42]): Ein RLCTG NW ist genau dann generisch eindeutig lösbar, wenn es einen NSF besitzt. \square

Beweis: Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß das NW (\mathcal{N}) resistiv ist, denn das NW, das aus \mathcal{N} durch Ersetzen aller Reaktanzen durch Widerstände entsteht ist genau dann generisch eindeutig lösbar, wenn \mathcal{N} selbst generisch eindeutig lösbar ist.

Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß das \mathcal{N} keine unabhängigen Quellen besitzt. Wenn nämlich \mathcal{N} generisch eindeutig lösbar ist oder einen NSF hat, dann gibt es weder eine Masche aus Spannungsquellen-Zweigen, noch einen Schnitt aus Stromquellen-Zweigen. Deshalb ist das NW, das aus \mathcal{N} durch Verkürzen von Spannungsquellen-Zweigen und Entfernen von Stromquellen-Zweigen entsteht genau dann generisch eindeutig lösbar, wenn \mathcal{N} selbst generisch eindeutig lösbar ist.

Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß \mathcal{N} keine T besitzt. Zunächst können alle T durch ideale 2-Wicklungs-Übertrager ersetzt werden, und diese lassen sich durch Paare von G ersetzen, so daß das entstehende NW genau dann generisch eindeutig lösbar ist, wenn \mathcal{N} selbst generisch eindeutig lösbar ist [43] [34, Probl. 18.1.5., 18.1.6.].

Der schwierige Teil des Beweises ist der für RG NW. Man findet zwei verschiedene Varianten in [10] und [42]. (Letztere ist in [34] skizziert.) \square

7.3 Theorem: Ein RLCTG NW \mathcal{N} habe einen NSF t . L bzw. C seien die Mengen der Induktivitäts- bzw. Kapazitäts-Zweige von \mathcal{N} . Dann ist

$$|C \cap t| + |L \setminus t| \tag{28}$$

die generische Komplexitätsordnung von \mathcal{N} und $V_{C \cap t} \cup I_{L \setminus t}$ ist ein GFSSC. \square

Beweis: Es gibt keine Masche aus Zweigen in $C \cap t$ und keinen Schnitt aus Zweigen von $L \setminus t$. Das Verkürzen der Zeige in $C \cap t$ und Entfernen der Zweige in $L \setminus t$ führt auf ein NW $\tilde{\mathcal{N}}$ mit den ZSZSG $\tilde{A}(p)\dot{x} + \tilde{B}(p)x = \tilde{q}$, welches einen NSF hat.

Das Verkürzen und Entfernen entspricht der Entwicklung von $\det(sA(p) + B(p))$ nach den zu den VCR der Zweige $(C \cap t) \cup (L \setminus t)$ gehörenden Zeilen, und

$$\det(s\tilde{A}(p) + \tilde{B}(p)) = \prod_{i \in (C \cap t) \cup (L \setminus t)} s p_i$$

ist der einzige Term in dieser Entwicklung, der den Ausdruck $\prod_{i \in (C \cap t) \cup (L \setminus t)} s p_i$ als Faktor enthält. (Dabei ist p_i die Kapazität bzw. Induktivität des Zeiges $i \in (C \cap t) \cup (L \setminus t)$.) Folglich ist $\deg(s \mapsto \det(sA(p) + B(p))) \geq |C \cap t| + |L \setminus t|$ für ein $p \in \mathbb{R}^k$.

Angenommen, in der Entwicklung von $\det(sA(p) + B(p))$ nach den zu den VCR der Reaktanzen gehörenden Zeilen gäbe es einen von Null verschiedenen Term vom Grad d in s mit $d > |C \cap t| + |L \setminus t|$. Dann wäre es möglich, d der C-Zweige bzw. L-Zweige durch VS-Zweige bzw. CS-Zweige so zu ersetzen, daß das entstehende NW generisch eindeutig lösbar ist. Letzteres hätte dann einen NSF, der auch ein NSF für \mathcal{N} wäre, was der Maximalität von t widerspricht.

Die Behauptungen ein GFSSC betreffend beweist man wie die entsprechenden Behauptungen in 5.5. \square

7.4 Theorem: *Der generische Index der ZSZSG (4) eines generisch eindeutig lösbaren RLCTG NW ist nicht größer als 2.* \square

Beweis: Der generische Index von (4) sei nicht 1. Dann ist die Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} K \\ M \\ A_{LC} \end{pmatrix}$$

nicht regulär, und es genügt zu zeigen, daß (A_1, B) vom generischen Index 1 ist [37]. Dafür ist hinreichend, daß

$$(A_1(p)x = 0 \wedge B(p)x \in \text{im } A_1(p)) \implies x = 0 \quad (29)$$

für alle p aus einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}_+^k = \{z \in \mathbb{R}^k \mid \forall_{i \in \{1, \dots, k\}} z_i > 0\}$ gilt [44, Th. 13, p. 198]. (Der Einfachheit halber wird das Argument p im folgenden stets weggelassen.)

$A_1 x$ ist genau dann Null, wenn $Ax = 0$ und $Bx \in \text{im } A$. Deshalb gilt (29) genau dann, wenn aus

$$Ax = 0 \wedge Bx \in \text{im } A \cap \text{im } A_1 \quad (30)$$

$x = 0$ folgt.

Aus $Bx = Ay = A_1 z$ folgt $Bz \in \text{im } A$ und $Bx = Az$. Deshalb ist (30) äquivalent zu

$$Ax = 0 \wedge \exists_y (Bx = Ay \wedge By \in \text{im } A). \quad (31)$$

Für alle $x \in \mathbb{R}^{2b}$ wird die Schreibweise

$$x = (x^V, x^I) = (x_V^V, x_I^V, x_R^V, x_L^V, x_C^V, x_T^V, x_G^V, x_V^I, x_I^I, x_R^I, x_L^I, x_C^I, x_T^I, x_G^I)$$

vereinbart, wobei x^V bzw. x^I die Vektoren der Zweigspannungen bzw. -ströme von \mathcal{N} sind und $x_V^V, x_I^V, x_R^V, x_L^V, x_C^V, x_T^V, x_G^V$ bzw. $x_V^I, x_I^I, x_R^I, x_L^I, x_C^I, x_T^I, x_G^I$ die Vektoren der Zweigspannungen bzw. -ströme der Spannungsquellen-, Stromquellen-, Widerstands-, Kapazitäts-, Induktivitäts-, Übertrager-, Gyrator-Zweige sind.

Mit dieser Vereinbarung gelten

$$\begin{aligned}\ker A &= \{x \in \mathbb{R}^{2b} \mid x_C^V = 0, x_L^I = 0\}, \\ \text{im } A &= \{0\}^{2b-\rho} \times \mathbb{R}^\rho,\end{aligned}$$

wobei ρ die Anzahl der Reaktanzen in \mathcal{N} ist. Außerdem ist $Bx \in \text{im } A$ zu

$$Kx = 0, x_V^V = 0, x_I^I = 0, x_R^V = M_R x_R^I, M_T(x_T^V, x_T^I) = 0, x_G^V = M_G x_G^I \quad (32)$$

äquivalent. Dabei repräsentieren die Matrizen M_R , M_T und M_G die VCR der Widerstands-, Übertrager- und Gyrator-Zweige. Genauer: $M_R(p)$ ist eine Diagonalmatrix aus Widerstandswerte repräsentierenden Parametern p_j , $M_T(p)$ ist wie in (7) und

$$M_G(p) = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & -p_{i_1} \\ p_{i_1} & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & -p_{i_{|G|/2}} \\ p_{i_{|G|/2}} & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Es ist offensichtlich, daß

$$\langle x_T^V | y_T^I \rangle = 0 \quad (33)$$

für alle x_T^V , x_T^I , y_T^V und y_T^I mit $M_T(x_T^V, x_T^I) = M_T(y_T^V, y_T^I) = 0$ gilt. Ebenso gilt

$$\langle x_G^V | y_G^I \rangle + \langle x_G^I | y_G^V \rangle = 0 \quad (34)$$

für alle x_G^V , x_G^I , y_G^V und y_G^I mit $x_G^V = M_G x_G^I$ und $y_G^V = M_G y_G^I$.

Es seien x, y wie in (31). Zu zeigen ist $x = 0$. Wegen $Bx \in \text{im } A$ und (32) gilt nach dem Satz von Weyl-Tellegen $\langle x^V | x^I \rangle = 0$, und mit $Ax = 0$, (33) und (34) folgen $x_C^V = 0$, $x_L^I = 0$ und

$$\begin{aligned}0 &= \underbrace{\langle x_V^V | x_V^I \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle x_I^V | x_I^I \rangle}_{=0} + \langle x_R^V | x_R^I \rangle + \underbrace{\langle x_L^V | x_L^I \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle x_C^V | x_C^I \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle x_T^V | x_T^I \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle x_G^V | x_G^I \rangle}_{=0} \\ &= \langle M_R x_R^I | x_R^I \rangle,\end{aligned}$$

was $x_R^V = x_R^I = 0$ wegen Definitheit von M_R nach sich zieht.

Aus $Bx = Ay$ folgt

$$x_C^I = M_C y_C^V, \quad (35)$$

$$x_L^V = M_L y_L^I \quad (36)$$

und aus $By \in \text{im } A$ folgt

$$Ky = 0, y_V^V = 0, y_I^I = 0, y_R^V = M_R y_R^I, M_T(y_T^V, y_T^I) = 0, y_G^V = M_G y_G^I \quad (37)$$

in Analogie zu (32). Nach dem Satz von Weyl-Tellegen gilt $\langle x^V | y^I \rangle = \langle y^V | x^I \rangle = 0$, d.h.

$$\begin{aligned}0 &= \langle x_L^V | y_L^I \rangle + \langle x_G^V | y_G^I \rangle \\ &= \langle M_L y_L^I | y_L^I \rangle + \langle x_G^V | y_G^I \rangle\end{aligned} \quad (38)$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= \langle y_C^V | x_C^I \rangle + \langle y_G^V | x_G^I \rangle \\ &= \langle y_C^V | M_C y_C^V \rangle + \langle y_G^V | x_G^I \rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

Dabei sind M_C bzw. M_L Diagonalmatrizen aus Kapazitäts- bzw. Induktivitätswerte repräsentierenden Parametern p_j .

Da M_C und M_L positiv definit sind, folgt aus (38), (39) und (34), daß $y_L^I = y_L^V = 0$ und $y_C^I = y_C^V = 0$ gelten. Wegen (35) und (36) ist also $x_C^I = 0$ und $x_L^V = 0$.

Es verbleibt nun noch zu zeigen, daß die Komponenten x_V^I , x_I^V , x_T^V , x_T^I , x_G^V und x_G^I von x gleich Null sind.

Aus den Voraussetzungen folgt, daß \mathcal{N} einen NSF t hat. \mathcal{N}' sei dasjenige NW, das aus \mathcal{N} durch Ersetzen aller NSF Zweige, außer Übertrager- und Gyrator-Zweigen, durch Kurzschlüsse, und durch Ersetzen aller Zweige, die nicht im NSF sind, außer Übertrager- und Gyrator-Zweigen, durch offene Zweige entsteht. Offenbar ist x eine Lösung von \mathcal{N}' und ist t ein NSF von \mathcal{N}' . \mathcal{N}' ist also generisch eindeutig lösbar und hat sogar nur die Nulllösung, woraus $x = 0$ folgt. \square

8 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde der Zusammenhang zwischen PCT und Basen gewisser Matroide angegeben. Dieses Ergebnis vereinheitlicht zwei verschiedene, zum einen auf PCT und zum anderen auf Matroiden basierende Herangehensweisen an generische Eigenschaften linearer elektrischer NW.

In den Abschnitten 4 und 5 wurden notwendige und hinreichende Bedingungen für die generische Lösbarkeit resistiver und dynamischer linearer NW angegeben. Außerdem wurden NW, deren ZSZSG vom generischen Index 1 sind sowie GFSSC von NW mit beliebigem Index charakterisiert und eine Methode zur Modifikation eines NW angegeben, die ein NW mit ZSZSG vom generischen Index 1 liefert.

Im Abschnitt 6 wurde ein Ergebnis über die Menge der bei der Indexbestimmung zu untersuchenden Minoren angegeben.

Schließlich wurde in Abschnitt 7 gezeigt, daß der generische Index der ZSZSG eines RLCTG NW nicht größer als 2 ist.

Die folgenden Probleme blieben ungelöst.

- Zur Berechnung des maximalen Ranges geschichteter gemischter $n \times n$ -Matrizen (LMM) [35] bzw. des maximalen Grades des charakteristischen Polynoms bestimmter Scharen aus solchen Matrizen sind Algorithmen bekannt, deren Komplexität sich durch $O(n^3 \log(n))$ bzw. $O(n^4)$ nach oben abschätzen läßt [35]. Es ist bisher nicht bekannt, ob sich bei Anwendung dieser - ggf. modifizierten - Algorithmen auf solche Matrizen und Scharen, die bei der Behandlung elektrischer NW auftreten, bessere Abschätzungen der Komplexität angeben lassen.
- Läßt sich das Erfülltsein der Voraussetzung (B) in Theorem 4.1 durch effektive Algorithmen prüfen?

- Läßt sich Voraussetzung (B) in Theorem 4.1 abschwächen?
- Die Gültigkeit der Umkehrung einiger Aussagen in den Theoremen 5.5 und 7.4 ist ungeklärt. Es sei z.B. $V_{C_1} \cup I_{L_1}$ unter den Voraussetzungen von Theorem 5.5 ein GFSSC ($C_1 \subseteq C, L_1 \subseteq L$). Gibt es dann Basen \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_3 , die in (12) das Maximum liefern und für die $V_{C_1} \cup I_{L_1} = (V_C \cup I_L) \cap \mathcal{B}_3$ gilt?
- Die angegebenen Resultate lassen eine Anwendung auf NW, die gekoppelte Kapazitäten oder Induktivitäten enthalten, nicht zu. (Die Schwierigkeit liegt in der Symmetrie der Kapazitäts- und Induktivitätsmatrizen.) Auch NW mit idealen Übertragern mit strukturiertem Kern sind nicht behandelbar.
- In praktischen NW kommen Transistoren häufig vor. Werden diese durch ein mehrzweiges Ebers-Moll-NW ersetzt, sind die Kriterien aus dieser Arbeit anwendbar. Die Anzahl der Zweige des NW steigt jedoch erheblich. Eine Beschreibung des Klemmenverhaltens eines Transistors als zweizweiges NW durch zwei Gleichungen scheint deshalb sinnvoller. Bisher ist aber nicht bekannt, ob z.B. die Identität (8) für die entsprechenden Matrizen aus den ZSZSG solcher NW noch gilt.
- Das Ergebnis aus Abschnitt 6 über die Position der Minoren maximalen Grades ist unausgereift. Es ist nötig, die Anzahl der zu untersuchenden Minoren weiter zu reduzieren und die Berechnung des Index' netzwerktheoretisch auszudrücken. Eine Erweiterung des Ergebnisses, daß ein generisch eindeutig lösbares RLCTG NW keinen höheren Index als 2 hat, auf nicht eindeutig lösbare NW kann dazu möglicherweise benutzt werden. Die Anwendbarkeit der Ergebnisse aus [32] ist ebenfalls noch nicht untersucht worden.
- Der Zusammenhang zwischen dem Index eines NW und der Eigenschaft einer Hybridmatrix, positiv reell zu sein, wurde bisher nicht untersucht. Das Ergebnis aus Abschnitt 7, daß ein RLCTG NW keinen höheren generischen Index als 2 hat, scheint jedenfalls ein Spezialfall der Tatsache zu sein, daß die Hybridmatrix eines RLCTG Mehrtores mit positiven Widerstand-, Kapazitäts- und Induktivitätswerten positiv reell ist [43].

Literatur

- [1] P. R. Bryant. The order of complexity of electrical networks. *Proc. IEE (GB), Part C*, 106:174–188, 1959.
- [2] L. O. Chua and R. A. Rohrer. On the dynamic equations of a class of nonlinear RLC networks. *IEEE Trans. on Circuit Theory*, 12(4):475–489, Dec. 1965.
- [3] S. J. Oh, T. E. Stern, and H. E. Meadows. On the analysis of nonlinear irregular networks. In *Symp. on Generalized Networks, Polytechnic Inst. of Brooklyn, April 12-14, 1966*, volume 16, pages 653–682, New York, 1966. Polytechnic Press.
- [4] P. R. Bryant. The explicit form of Bashkow's A matrix. *IRE Trans. on Circuit Theory*, 9(3):303–306, 1962.

- [5] E. S. Kuh, D. M. Layton, and J. Tow. Network analysis and synthesis via state variables. In G. Biorci, editor, *Network and switching theory*. Academic Press, 1968.
- [6] M. M. Milić. Some topologico-dynamical properties of linear passive reciprocal networks. *Internat. J. Circuit Theory Appl.*, 5:417–429, 1977.
- [7] P. R. Bryant and J. Tow. The A -matrix of linear passive reciprocal networks. *J. Franklin Inst.*, 293(6):401–419, June 1972.
- [8] J. Tow. The explicit form of Bashkow’s A matrix for a class of linear passive networks. *IEEE Trans. on Circuit Theory*, 17(1):113–115, Feb. 1970.
- [9] M. M. Milic. Explicit formulation of the state equations for a class of degenerate linear networks. *Proc. IEE (GB)*, 118(6):742–745, June 1971.
- [10] M. M. Milić. General passive networks - solvability, degeneracies, and order of complexity. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 21(2):177–183, Mar. 1974.
- [11] E. J. Purslow and R. Spence. Order of complexity of active networks. *Proc. IEE*, 114(2):195–199, Feb. 1967.
- [12] E. J. Purslow. Solvability and analysis of linear active networks by use of the state equations. *IEEE Trans. on Circuit Theory*, 17(4):469–475, Nov. 1970.
- [13] T. Ozawa. Order of complexity of linear active networks and a common tree in the 2-graph method. *Electron. Lett.*, 8(22):542–543, 2nd Nov. 1972.
- [14] M. Chandrashekar and H. K. Kesavan. On the existence of solutions to linear active networks: A state space approach. *Internat. J. Circuit Theory Appl.*, 2:331–340, 1974.
- [15] T. Ozawa. Topological conditions for the solvability of linear active networks. *Internat. J. Circuit Theory Appl.*, 4:125–136, 1976.
- [16] J. Tow. Order of complexity of linear active networks. *Proc. IEE*, 115(9):1259–1262, Sept. 1968.
- [17] A. Recski. Sufficient conditions for the unique solvability of linear networks containing memoryless 2-ports. *Internat. J. Circuit Theory Appl.*, 8:95–103, 1980.
- [18] M. Iri and N. Tomizawa. A practical criterion for the existence of the unique solution in a linear electrical network with mutual couplings. *Trans. Inst. Electron. & Commun. Eng. Jpn.*, 57-A(8):35–41, 1974.
- [19] M. Iri and N. Tomizawa. An algorithm for solving the independent assignment problem. *Trans. Inst. Electron. & Commun. Eng. Jpn.*, 57-A(8):627–629, 1974.
- [20] A. Recski. Contributions to the n -port interconnection problem by means of matroids. In A. Hajnal and V. T. Sós, editors, *Combinatorics*, volume II of *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 18, 1976*, pages 877–892, Amsterdam, Oxford, New York, 1978. North-Holland.

- [21] A. Recski. Unique solvability and order of complexity of linear networks containing memoryless n-ports. *Internat. J. Circuit Theory Appl.*, 7:31–42, 1979.
- [22] A. Recski and J. Takács. On the combinatorial sufficient conditions for linear network solvability. *Internat. J. Circuit Theory Appl.*, 9:351–354, 1981.
- [23] B. Petersen. Investigating solvability and complexity of linear active networks by means of matroids. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 26(5):330–342, May 1979.
- [24] K. Murota and M. Iri. Structural solvability of systems of equations – a mathematical formulation for distinguishing accurate and inaccurate numbers in structural analysis of systems –. *Japan J. Appl. Math.*, 2:247–271, 1985.
- [25] K. Murota. Use of the concept of physical dimensions in the structural approach to systems analysis. *Japan J. Appl. Math.*, 2:471–494, 1985.
- [26] K. Murota. Finding optimal minors of valuated bimatroids. *Appl. Math. Lett.*, 8(4):37–41, 1995.
- [27] A. W. M. Dress and W. Terhalle. Well-layered maps and the maximum-degree $k \times k$ -subdeterminant of a matrix of rational functions. *Appl. Math. Lett.*, 8(4):19–23, 1995.
- [28] M. Hasler. Non-linear non-reciprocal resistive circuits with a structurally unique solution. *Internat. J. Circuit Theory Appl.*, 14:237–262, 1986.
- [29] M. Fosséprez. *Non-linear Circuits: Qualitative Analysis of Non-linear, Non-reciprocal Circuits*. John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1992.
- [30] M. Hasler and J. Neiryneck. *Nonlinear Circuits*. Artech House, Norwood, MA, 1986.
- [31] M. Hasler, C. Marthy, A. Oberlin, and D. de Werra. A discrete model for studying existence and uniqueness of solutions in nonlinear resistive circuits. *Discrete Appl. Math.*, 50:169–184, 1995.
- [32] K. Murota. Structural approach in systems analysis by mixed matrices – An exposition for index of DAE –. In *Proc. ICIAM 1995, Hamburg*, 1996.
- [33] G. Reißig and U. Feldmann. Computing the generic index of the circuit equations of linear active networks. In *Proc. 1996 Int. Symp. on Circuits and Systems (ISCAS), Atlanta, GA, May 12-15*, volume III, pages 190–193, 1996.
- [34] A. Recski. *Matroid Theory and its Applications in Electrical Network Theory and in Statics*, volume 6 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1989.
- [35] K. Murota. *Systems Analysis by Graphs and Matroids: Structural Solvability and Controllability*, volume 3 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1987.

- [36] F. R. Gantmacher. *Matrizentheorie*, volume 86 of *Hochschulbücher für Mathematik*. VEB Dt. Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986.
- [37] E. Griepentrog and R. März. Basic properties of some differential-algebraic equations. *Z. Anal. Anwendungen*, 8(1):25–40, 1989.
- [38] S. L. Campbell. *Singular systems of differential equations*, volume 40 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman, San Francisco, London, Melbourne, 1980.
- [39] S. Seshu and M. B. Reed. *Linear Graphs and Electrical Networks*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, U.S.A., London, England, 1961.
- [40] G. Gerlach. Entwurf mechanischer Sensoren unter Nutzung von netzwerkfähigen Biegestab- und Plattenmodellen. *Technisches Messen*, 62(11):407–415, 1995.
- [41] Schroth. Dr.-Ing. thesis, TU Dresden, Fakultät Elektrotechnik, 1996.
- [42] L. Lovász and M. Plummer. *Matching Theory*. North-Holland, 1986.
- [43] V. Belevitch. *Classical network theory*. Holden-Day Series in Information Systems. Holden-Day, San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam, 1968.
- [44] E. Griepentrog and R. März. *Differential-Algebraic Equations and Their Numerical Treatment*, volume 88 of *TEUBNER-TEXTE zur Mathematik*. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, first edition, 1986.

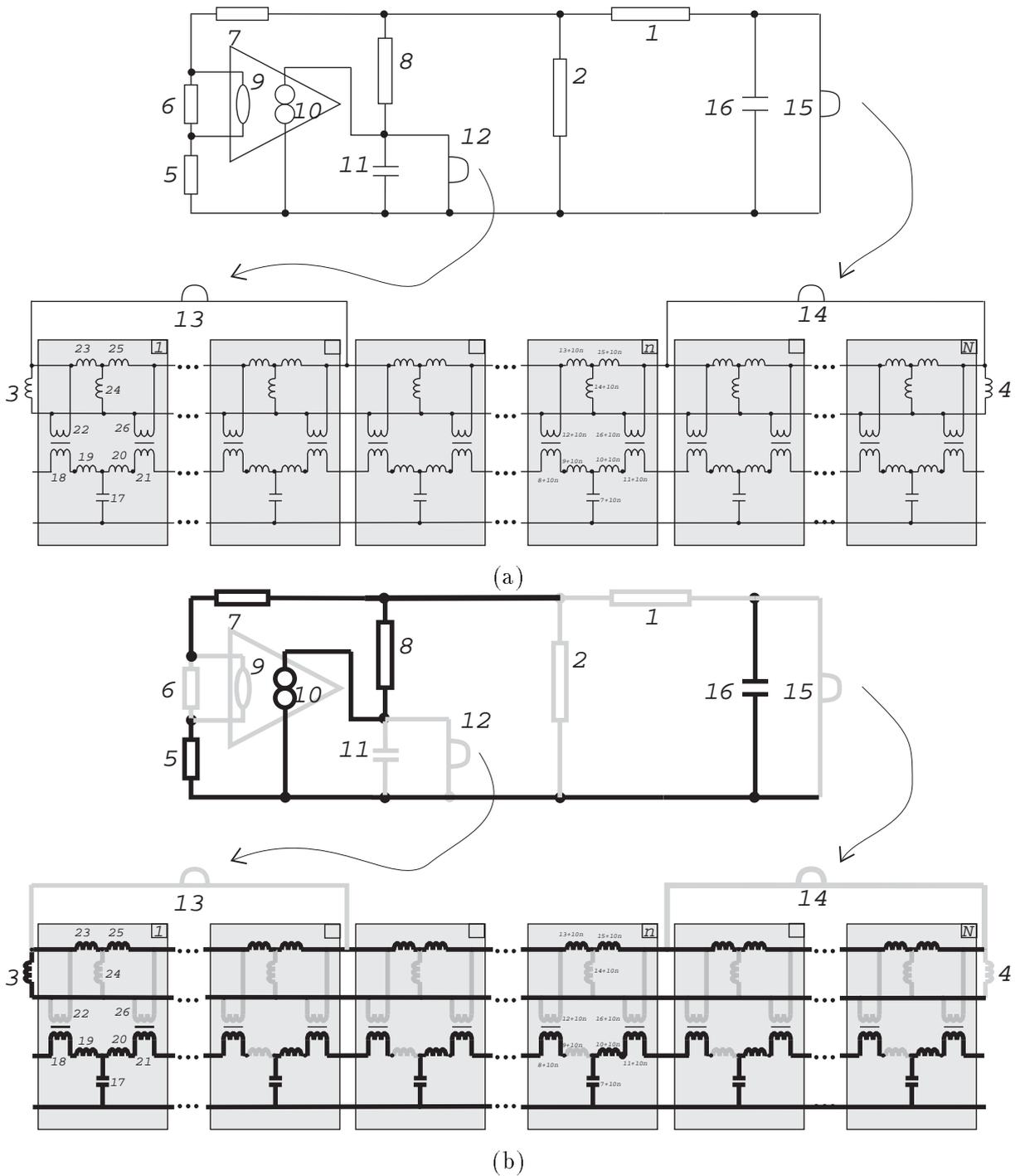


Fig. 6: Illustration von Beispiel 5.3. Das in (a) dargestellte NW hat ein PCT (t_1, t_2) . Die Zweige von t_1 sind in (b) fett. Der Baum t_2 unterscheidet sich von t_1 nur dadurch, daß er statt Zweig 10 den Zweig 9 enthält.