Beiträge zu Theorie und Anwendungen impliziter Differentialgleichungen

Gunther Reißig

An der Fakultät Elektrotechnik der TU Dresden
eingereichte Dissertation zur Erlangung des
zweiten akademischen Grades

Doktoringenieur (Dr.–Ing.)

Tag der Einreichung: 8. 9. 1997

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. habil. A. Reibiger

Es ist mir ein Bedürfnis, Herrn Prof. A. Reibiger, der mich in den vergangenen Jahren betreut hat, zu danken. Stets habe ich von seinen Anregungen und Hinweisen profitiert, und sein beständiges Interesse an meinen Ergebnissen, seine kritischen Fragen und sein Lob waren ein enormer Ansporn.

Einigen Angehörigen der Fachrichtung Mathematik der TU Dresden bin ich ebenso zu Dank verpflichtet. Insbesondere Herr Prof. Th. Riedrich, der mich während der Anfertigung meiner Diplomarbeit betreute, gab mir wertvolle Hinweise.

Herrn Dr. A. Leuciuc (Iasi) danke ich für seine Bemerkungen zu einer früheren Version des Kapitels 2.

Herrn Dr. U. Feldmann (München) und Herrn Prof. W. Mathis (Magdeburg) danke ich für die Bereitschaft zur Begutachtung dieser Arbeit und für fachliche Anregungen. Außerdem danke ich Herrn Prof. W. Mathis für wichtige Literaturhinweise.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eine Vielzahl mechanischer, elektrischer, chemischer und physikalischer Vorgänge und Systeme kann durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden. Diese Differentialgleichungen sind dabei vom Typ

$$0 = F(t, p, x, \dot{x}) \tag{0.1}$$

mit $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ offen, oder vom Typ

$$\dot{x} = f(t, p, x) \tag{0.2}$$

mit $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ offen. Im ersten Fall bezeichnet man sie als *implizit*, im zweiten als *explizit*. (Wir setzen $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ voraus; p spielt die Rolle eines Parameters und t die der Zeit. Die explizite Differentialgleichung (0.2) wird im folgenden als Spezialfall der impliziten Differentialgleichung (0.1) mit $F(t, p, x, y) = y - f(t, p, x)$ aufgefaßt.)

Es gibt Systeme, die sich durch eine implizite Differentialgleichung der Form (0.1) beschreiben lassen, für die es aber keine adäquate Beschreibung durch eine explizite Differentialgleichung der Form (0.2) gibt. Aber auch in den Fällen, in denen prinzipiell beide Varianten möglich sind, hat die Wahl einer impliziten Differentialgleichung oft erhebliche Vorteile:

Die Aufstellung impliziter Differentialgleichungen aus anderen Beschreibungsformen des zu analysierenden Objektes ist einfach. So erzeugt z.B. übliche Simulations–Software für elektrische Netzwerke implizite Differentialgleichungen automatisch aus Netzlisten und aus graphischen Beschreibungsformen. Weitaus schwieriger ist es dagegen, explizite Differentialgleichungen zu erhalten. Ihre Erzeugung mit numerischen Algorithmen ist oft problematisch, und die Erzeugung durch symbolische Rechnung ist, wenn überhaupt möglich, sehr zeitaufwendig.

Weiterhin haben implizite Differentialgleichungen zur Beschreibung von Systemen oft eine einfache und übersichtliche Struktur. So sind z.B. die Koeffizientenmatrizen der Zweigspannungs–Zweigstrom–Gleichungen linearer elektrischer Netzwerke dünn besetzt, was eine effektive Speicherung dieser Matrizen und kurze Rechenzeiten ermöglicht. Aus impliziten Differentialgleichungen abgeleitete explizite Differentialgleichungen haben oftmals eine komplizierte Struktur. Nicht nur die dünne Besetztheit geht verloren, sondern auch der Zusammenhang zwischen einzelnen Komponenten des Vektors der Unbekannten und relevanten physikalischen Größen des Systems. Schließlich hängen diese expliziten Differentialgleichungen in komplizierter Weise von Parametern wie z.B. Widerstandswerten ab, was die Analyse von parameterabhängigen Systemeigenschaften erschwert.

Andererseits können implizite Differentialgleichungen Eigenschaften aufweisen, die man von expliziten Differentialgleichungen nicht kennt und die bei der Systemsimulation mitunter zu erheblichen Schwierigkeiten führen. Wir wollen im folgenden solche Unterschiede zwischen impliziten und expliziten Differentialgleichungen anhand von Beispielen ausführlich erläutern und in zwei Fällen das Versagen üblicher Simulations–Software demonstrieren:

Zunächst nennen wir eine Abbildung $x\colon I \to \mathbb{R}^n \in C^1$ *Lösung* der impliziten Differentialgleichung (0.1), falls $(t,p,x(t)) \in U$ und $F(t,p,x(t),\dot{x}(t)) = 0$ für alle $t \in I$ gelten. (Dabei ist I ein offenes, nicht notwendig beschränktes, Intervall, d.h., $I \subseteq \mathbb{R}$ ist offen, zusammenhängend und nichtleer.) Eine Lösung x *geht zur Zeit* t_0 *durch* x_0, wenn $x(t_0) = x_0$ gilt; sie *geht durch* x_0, wenn $x_0 \in \operatorname{im} x$ gilt.

Zu den grundlegenden Aussagen aus der Theorie der expliziten Differentialgleichungen gehört der folgende Satz, der z.B. in [Zei93] bewiesen ist:

0.0.1 Theorem (Picard–Lindelöf): *Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n \in C^r$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty,\omega\}$ und $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von (t_0,p_0,x_0).*

Dann gibt es offene Umgebungen $I \subseteq \mathbb{R}$ von t_0, $U_{x_0} \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0, $U_{p_0} \subseteq \mathbb{R}^k$ von p_0 und eine C^r–Abbildung $\varphi\colon I \times U_{x_0} \times U_{p_0} \to \mathbb{R}^n$, so daß folgendes gilt: Für alle $x \in U_{x_0}$ und alle $p \in U_{p_0}$ ist $\varphi(\cdot,x,p)$ eine Lösung von (0.2), die zur Zeit t_0 durch x geht. Ist ψ auch eine Lösung von (0.2), die zur Zeit t_0 durch x geht, dann stimmen ψ und $\varphi(\cdot,x,p)$ auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche überein. □

Aus diesem Satz kann man folgende Schlüsse ziehen:

(i) **(Existenz)** Für alle $(t_0,p,x) \in U$ gibt es eine Lösung von (0.2), die zur Zeit t_0 durch x geht.

(ii) **(Eindeutigkeit)** Ist $(t_0,p,x) \in U$ und sind φ_1 und φ_2 zwei Lösungen von (0.2), die zur Zeit t_0 durch x gehen, dann stimmen φ_1 und φ_2 auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche überein.

(iii) **(Fortsetzbarkeit)** Ist $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ und ist $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Lösung von (0.2) mit $\sup I \in \mathbb{R}$, dann kann x nach rechts fortgesetzt werden [Ama83, Korollar 7.7]. (Das bedeutet, daß es eine Lösung $\tilde{x}\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ von (0.2) mit $I \subseteq \tilde{I}$, $\sup I < \sup \tilde{I}$ und $\tilde{x}|_I = x$ gibt.)

(iv) **(Beschränkte Abhängigkeit von Störungen)** Ist $(t_0,p,x) \in U$ und ist φ_1 eine Lösung von (0.2), die zur Zeit t_0 durch x geht, dann gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von (t_0,p,x) und positive Konstanten T und L, so daß folgendes gilt: Sind $\varepsilon > 0$, $T' \in \,]t_0, t_0+T]$ und $\varphi_2 \in C^1$ eine auf einer Umgebung von $[t_0,T']$ definierte ε–Näherungslösung von (0.2), so daß $(t,p,\varphi_2(t)) \in V$ für alle $t \in \operatorname{dom}\varphi_2$ gilt, dann gilt die Abschätzung

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq L\,(\|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\| + \varepsilon)$$

für alle $t \in [t_0,T']$ [Ama83, Lemma 6.6]. (Eine Abbildung $\varphi \in C^1$ heißt *ε–Näherungslösung* von (0.2), falls $\|\dot{\varphi}(t) - f(t,p,\varphi(t))\| \leq \varepsilon$ für alle $t \in \operatorname{dom}\varphi$ gilt [Ama83].)

Die folgenden Beispiele zeigen, daß die zu (i)–(iv) analogen Aussagen für die implizite Differentialgleichung (0.1) i. allg. nicht richtig sind.

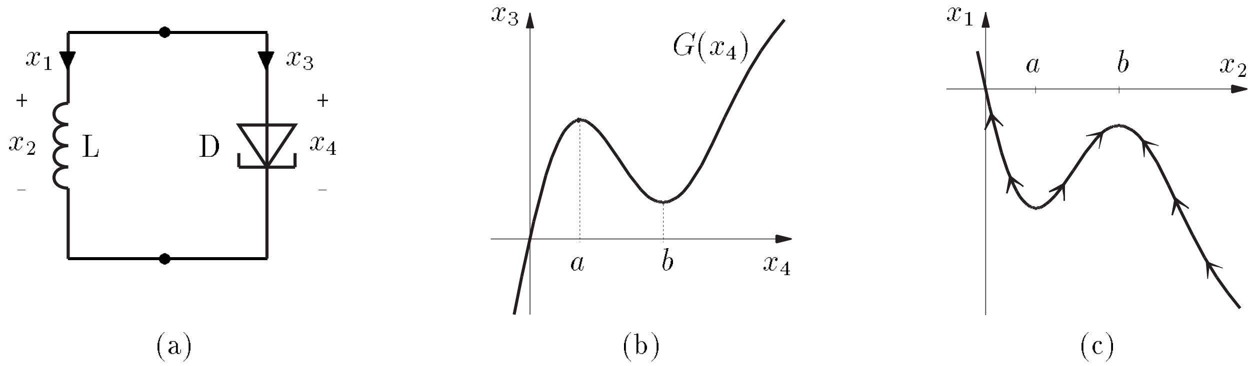

Abbildung 0.1: (a) Das in Beispiel 0.0.2 untersuchte elektrische Netzwerk. Die Spannungs-Strom-Relation des resistiven Tunneldioden–Modells wird durch die Gleichung $x_3 = G(x_4)$ beschrieben; (b) zeigt den Graph von G. (c) Veranschaulichung des Verhaltens des Systems (0.3)–(0.4).

0.0.2 Beispiel (Existenz, Fortsetzbarkeit): Wir untersuchen das in Abb. 0.1(a) dargestellte normierte[1] Netzwerk aus einem resistiven Tunneldioden–Modell und einer Induktivität mit dem Wert 1. Die u–i–Relation des Tunneldioden–Modells wird durch den Zusammenhang $x_3 = G(x_4)$ beschrieben. Dabei nehmen wir an, daß die Abbildung $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Graph in Abb. 0.1(b) dargestellt ist, hinreichend glatt ist und genau die zwei Extremstellen a und b hat. Außerdem soll DG außerhalb dieser beiden Extremstellen von Null verschieden sein.

Die Analyse dieses Netzwerkes führt auf die implizite Differentialgleichung

$$0 = \dot{x}_1 - x_2, \tag{0.3}$$

$$0 = x_1 + G(x_2). \tag{0.4}$$

Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen läßt sich leicht zeigen, daß durch alle Punkte (x_1, x_2) mit $x_1 = -G(x_2)$ und $x_2 \notin \{a, b\}$ eine Lösung von (0.3)–(0.4) geht. Daß durch die Punkte $(-G(a), a)$ und $(-G(b), b)$ keine Lösung geht, sieht man folgendermaßen: Ist $\varphi\colon t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ eine Lösung durch einen dieser Punkte zur Zeit 0, dann ist $\dot{\varphi}_1(0) > 0$. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $\varphi_1(-t) < \varphi_1(0) < \varphi_1(t)$ für alle $t \in \,]0, \varepsilon[$ gilt. Das ist aber nicht möglich, da a und b Extremstellen von G sind.

Die Menge derjenigen Punkte, durch die Lösungen gehen, ist also $\{(-G(x_2), x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}\}$, eine offene Teilmenge der durch (0.4) festgelegten Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

Es sei nun $\varphi\colon t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ eine Lösung von (0.3)–(0.4) mit $a < \varphi_2(0) < b$, die nach rechts nicht fortsetzbar ist. (Eine solche Lösung existiert nach dem ZORNschen Lemma [MM82].) Dann gelten offenbar

$$-G(a) < \varphi_1(t) < -G(b) \tag{0.5}$$

und $a < \varphi_2(t) < b$ für alle $t \in \operatorname{dom} \varphi$; insbesondere ist φ beschränkt. Aus (0.3) folgt $\dot{\varphi}_1(t) > a$ (siehe Abb. 0.1(c)), und damit $\varphi_1(t) > \varphi_1(0) + at$ für alle positiven $t \in \operatorname{dom} \varphi$,

[1] Alle in dieser Arbeit behandelten Netzwerke sind normiert.

und aus (0.5) folgt $\sup \operatorname{dom} \varphi \leq \frac{G(a)-G(b)}{a}$. Folglich ist die zu (iii) analoge Aussage für (0.1) falsch.

Punkte wie $(-G(a), a)$ und $(-G(b), b)$, durch die keine Lösung geht, zu denen aber Lösungen in endlicher Zeit konvergieren, nennt man *nicht passierbar*. Übliche Software zur Simulation elektrischer Netzwerke ist nicht in der Lage, das Erreichen solcher Punkte zu detektieren. Es kommt z.B. vor, daß als numerische Lösung eine Schwingung kleiner Amplitude ausgegeben wird [CD89]. Bei der Analyse des Netzwerkes aus Abb. 0.1(a) mit $G(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$, $a = 2$, $b = 4$ und einem Anfangsstrom der Induktivität von 21 ($G(a) = 20 < G(5.1) \approx 21$) brach das Programm `PSPICE 7.1` die Rechnung mit der Meldung

```
ERROR -- Convergence problem in transient analysis at Time =  1.054
         Time step =  291.0E-15, minimum allowable step size =  2.000E-12

  These voltages failed to converge:

    V($N_0001)                    =          4.00195 / 3.99707
```

ab. □

0.0.3 Beispiel (Existenz, Eindeutigkeit): Implizite Differentialgleichungen treten auch bei der Analyse von Objekten auf, die auf den ersten Blick von ganz anderer Natur sind: Wir betrachten die *quasilineare partielle Differentialgleichung* zweiter Ordnung

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = d(x,y,u,u_x,u_y) \tag{0.6}$$

mit den zwei unabhängigen Veränderlichen x und y. (Wir verwenden in der Theorie partieller Differentialgleichungen übliche Schreibweisen und Begriffe: u_x, u_{xx}, u_{xy} usw. stehen für $D_1u(x,y)$, $D_1^2u(x,y)$, $D_1D_2u(x,y)$ usw.; "zwei unabhängige Veränderliche" [CH68] bedeutet, daß die gesuchte Funktion u auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ mit nichtleerem Innern definiert sein soll.)

Die Eigenschaften der partiellen Differentialgleichung (0.6) in der Nähe eines betrachteten Punktes (x,y) hängen wesentlich davon ab, ob der Ausdruck

$$a(x,y)c(x,y) - (b(x,y))^2 \tag{0.7}$$

größer, kleiner oder gleich Null ist. Deshalb hat man diesen drei Fällen eigene Namen gegeben: Im ersten heißt (0.6) im Punkt (x,y) *elliptisch*, im zweiten *hyperbolisch* und im dritten *parabolisch* [CH68].

In der Theorie der partiellen Differentialgleichung (0.6) spielen Lösungen der impliziten Differentialgleichung

$$a(x,y(x))(y'(x))^2 - 2b(x,y(x))y'(x) + c(x,y(x)) = 0, \tag{0.8}$$

die *charakteristischen Kurven*, eine wesentliche Rolle [CH68]. Auch die Eigenschaften dieser impliziten Differentialgleichung hängen vom Vorzeichen des Ausdruckes (0.7) ab: Ist (0.6) im Punkt (x_0, y_0) hyperbolisch, dann gibt es offenbar genau zwei lokale Lösungen von (0.8), die zur Zeit x_0 durch y_0 gehen. Ist (0.6) im Punkt (x_0, y_0) dagegen elliptisch, so gibt es keine solche Lösung. (Dabei haben wir angenommen, daß a, b und c hinreichend glatt sind.) Folglich sind die zu (i) und (ii) analogen Aussagen für (0.1) i. allg. falsch. □

0.0.4 Beispiel (Existenz, Beschränkte Abhängigkeit von Störungen): Wir betrachten die implizite Differentialgleichung

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{0.9}$$

$$x_1 = 0. \tag{0.10}$$

Offenbar gehen nicht durch alle Punkte aus $\mathbb{R}^2$ Lösungen von (0.9), (0.10); die zu (i) analoge Aussage für (0.1) ist also falsch. Mehr noch, nicht durch alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, die (0.10) erfüllen, geht eine Lösung. Die (bis auf Einschränkung des Definitionsbereiches) einzige Lösung von (0.9), (0.10) ist nämlich $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon t \mapsto (0, 0)$.

Um zu sehen, daß nicht durch alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, die (0.10) erfüllen, eine Lösung geht, differenzieren wir $x_1(t) = 0$ nach t und erhalten aus (0.10) die zusätzliche Bedingung (*hidden constraint* [Rhe90]) $\varphi_2 = 0$ für Lösungen φ von (0.9), (0.10). Diese zusätzliche Bedingung liefert hier zusammen mit (0.10) die Menge derjenigen Punkte, durch die Lösungen von (0.9), (0.10) gehen. Im allgemeinen sind jedoch weitere Differentiationen der erhaltenen zusätzlichen Bedingungen notwendig, um diese Menge zu bestimmen; die um 1 erhöhte Anzahl solcher Differentiationsschritte nennt man den *Differentiations–Index* (*differentiation index* [CG95]). Die implizite Differentialgleichung (0.9), (0.10) ist also in diesem Sinne vom Index 2.

Die an (0.9), (0.10) beobachtete Eigenschaft, daß nicht durch alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, die (0.10) erfüllen, eine Lösung geht, bereitet bei der Simulation impliziter Differentialgleichungen vom Index 2 oder höher tatsächlich Probleme. Bei elektrischen Netzwerken bedeutet diese Eigenschaft z.B., daß man nur bestimmte Kapazitäts–Spannungen und Induktivitäts–Ströme unabhängig voneinander als Anfangswerte wählen kann.

Wir wollen nun ein weiteres Problem impliziter Differentialgleichungen erläutern: Sind die Differentialgleichungen (0.1) und (0.2) Modelle praktischer Probleme oder physikalischer Vorgänge, dann wird die Zeitabhängigkeit oftmals durch eine additive Inhomogenität hervorgerufen. Das bedeutet, daß F in (0.1) die Form $F(t, p, x, y) = F_1(p, x, y) + F_2(t)$ hat und f in (0.2) die Form $f(t, p, x) = f_1(p, x) + f_2(t)$ hat. Diese additive Inhomogenität kann z.B. das Eingangssignal eines elektrischen Netzwerkes, eine durch ein magnetisches Feld induzierte Störspannung oder einen bei numerischer Analyse auftretenden Rechenfehler darstellen. Es leuchtet deshalb ein, daß die Abhängigkeit der Lösungen von additiven Inhomogenitäten eine wesentliche Eigenschaft dieser Differentialgleichungen ist.

Zur Erläuterung der Eigenschaft (iv) der expliziten Differentialgleichung (0.2) betrachten wir den Fall, daß f vom ersten und zweiten Argument unabhängig ist. Wir untersuchen also die explizite Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x), \tag{0.11}$$

die im folgenden *ungestört* genannt wird, mit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in C^1$. Es sei φ_1 eine Lösung von (0.11), die zur Zeit 0 durch 0 geht sowie $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullumgebung und T und L positive Konstanten, deren Existenz in (iv) behauptet wird. Außerdem sei $\varepsilon > 0$ beliebig und g irgendeine stetige Abbildung, im folgenden *Störung*, die auf einer Umgebung von $[0, T]$ definiert ist und für die

$$\varepsilon = \sup_{t \in \operatorname{dom} g} \|g(t)\|$$

gilt. Weiter sei φ_2 eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) + g(t), \tag{0.12}$$

die zur Zeit 0 durch 0 gehen, Werte in V haben und auf einer Umgebung von $[0,T]$ definiert sein soll; (0.12) heißt im folgenden *gestört*.

Die Eigenschaft (iv) der expliziten Differentialgleichung (0.11) zieht in diesem Fall nach sich, daß

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq L\varepsilon$$

für alle $t \in [0,T]$ gilt.

Um zu zeigen, daß implizite Differentialgleichung diese Eigenschaft i. allg. nicht haben, betrachten wir die ungestörte Gleichung (0.9), (0.10), die ein Spezialfall von (0.1) ist; offenbar gilt $\varphi_1 = 0$.

Wir definieren nun eine Familie $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Störungen durch

$$g_k(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\cos(kt) - 1)/(2k) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{0.13}$$

$$x_1 = (\cos(kt) - 1)/(2k) \tag{0.14}$$

die gestörte Gleichung und die durch

$$\varphi_{2,k}(t) = \begin{pmatrix} (\cos(kt) - 1)/(2k) \\ -\sin(kt)/2 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}$ definierte Abbildung $\varphi_{2,k}$ ist Lösung dieser gestörten Gleichung. Offenbar gelten nun

$$\sup_{t\in[0,T]} \|g_k(t)\| = 1/k$$

und

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\varphi_{2,k}(t)\| \geq 1/2$$

für hinreichend großes k. ($\|\cdot\|$ sei die übliche EUKLIDische Norm.) Insbesondere ist $\|\varphi_{2,k}(t) - \varphi_1(t)\|$ für $t \in [0,T]$ und hinreichend großes k nicht durch L/k beschränkt. Anschaulich bedeutet das, daß die Störung gegen 0 strebt, die Abweichung der Lösung der gestörten Gleichung von der Lösung der ungestörten Gleichung aber nicht.

Offenbar hat also die implizite Differentialgleichung (0.9), (0.10) nicht die Eigenschaft (iv). Die Ursache dafür ist, daß die Ableitung der Störung in die Lösung dieser Differentialgleichung eingeht. Im allgemeinen ist es sogar so, daß Ableitungen höherer Ordnung in Lösungen direkt eingehen: Für lineare Algebro–Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gilt, daß die höchste Ordnung der Ableitung der Störung, die in die Lösung eingeht, um 1 geringer ist, als der Index dieser Algebro–Differentialgleichung; insbesondere ist der Index der von uns untersuchten Algebro–Differentialgleichung (0.9), (0.10) gleich 2.

Die Analyse solcher Effekte führt auf den Begriff des *Störungsindex* (*perturbation index* [HLR89]), der mit den in dieser Arbeit verwendeten Indexbegriffen verwandt ist und im Falle linearer Algebro–Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit ihnen übereinstimmt [HW91, CG95].

In der Regel sind die bei numerischen Simulationen zu erwartenden Schwierigkeiten desto größer, je höher der Störungsindex der zu simulierenden Gleichung ist. Um das zu demonstrieren, betrachten wir das in Abb. 0.2(a) dargestellte Netzwerk aus [Rei97]. Die von der unabhängigen Spannungsquelle gelieferte Spannung u_1 sei durch

$$u_1(t) = \begin{cases} 5t^4 - t^5 & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben; siehe Abb. 0.2(b). Die Kapazität und die Induktivität sollen den Wert 1 haben, und α sei der Verstärkungskoeffizient der spannungsgesteuerten Spannungsquelle.

Man kann zeigen, daß die Zweigspannungs–Zweigstrom–Gleichungen dieses Netzwerkes für $\alpha \neq 1$ vom Index 1 sind. Sind die Spannung über der Kapazität und der Strom durch die Induktivität zur Zeit 0 gleich 0 und ist $\alpha = 2$, dann gilt für die Spannung u_2 über dem gesteuerten Zweig der gesteuerten Quelle

$$u_2(t) = \begin{cases} 240(-1 + e^{-t} + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}) & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

siehe Abb. 0.2(c). Das Ergebnis der numerischen Berechnung der Spannung u_2 mit Hilfe des Simulationsprogramms `PSPICE 7.1` ist in Abb. 0.2(e) graphisch dargestellt; augenscheinlich stimmt der numerisch berechnete Verlauf von u_2 mit dem formelmäßig berechneten überein.

Im Gegensatz dazu kann man zeigen, daß die Zweigspannungs–Zweigstrom–Gleichungen dieses Netzwerkes für $\alpha = 1$ vom Index 3 sind. In diesem Fall kann weder die Spannung über der Kapazität, noch der Strom durch die Induktivität als Anfangswert frei gewählt werden, vielmehr sind beide Größen durch die eingeprägte Spannung u_1 festgelegt.

Für die Spannung u_2 gilt hier

$$u_2(t) = \begin{cases} -60\,t^2 + 20\,t^3 & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

siehe Abb. 0.2(d). Das Ergebnis der numerischen Berechnung der Spannung u_2 mit Hilfe des Simulationsprogramms `PSPICE 7.1` ist in Abb. 0.2(f) graphisch dargestellt. Es ist offensichtlich, daß der numerisch berechnete Verlauf von u_2 *nicht* mit dem formelmäßig berechneten übereinstimmt.

Das Beispiel des von uns untersuchten Netzwerkes macht noch ein weiteres Problem deutlich: Eigenschaften impliziter Differentialgleichungen hängen i. allg. von Parametern wie dem Verstärkungskoeffizienten α ab, und die Kenntnis von Systemeigenschaften für einzelne Parameterwerte ist praktisch wenig nützlich. Ist z.B. die gesteuerte Spannungsquelle im von uns untersuchten Netzwerk Modell eines realen Bauelementes, so ist ihr Verstärkungskoeffizient α nicht exakt bekannt und die Aussage, für $\alpha = 1$ sei der Index 3, wertlos. Viel wichtiger ist deshalb die Tatsache, daß die Zweigspannungs–Zweigstrom–Gleichungen dieses Netzwerkes den *generischen* Index 1 haben, daß also für die meisten Werte von α (in einem

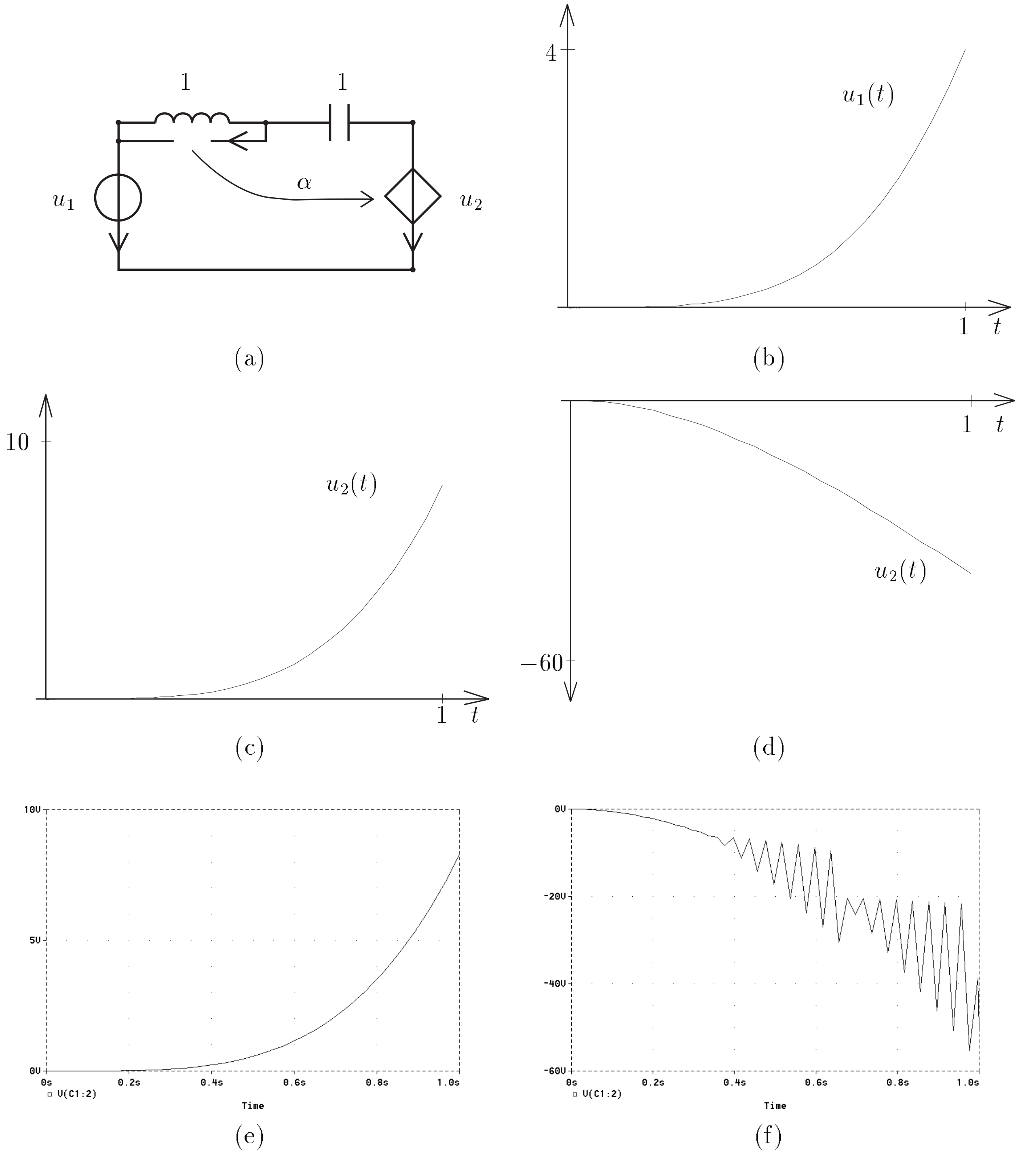

Abbildung 0.2: (a) Das in Beispiel 0.0.4 untersuchte Netzwerk. Für $\alpha \neq 1$ sind die Zweigspannungs–Zweigstrom–Gleichungen dieses Netzwerkes vom Index 1 und sonst vom Index 3. (b) Verlauf der Spannung u_1. (c),(d) Verlauf der Spannung u_2 für $\alpha = 2$ bzw. $\alpha = 1$. (e),(f) Mit `PSPICE 7.1` numerisch berechneter Verlauf der Spannung u_2 im Fall $\alpha = 2$ bzw. $\alpha = 1$.

in Kapitel 2 präzisierten Sinne) der Index gleich 1 ist. Eine solche Aussage kann aber wegen der in der Praxis auftretenden großen Netzwerke — und darin besteht das Problem — i. allg. nicht durch symbolische Rechnungen erhalten werden; vielmehr sind andere Verfahren zur Ermittlung generischer Eigenschaften zu entwickeln.

Wir bemerken abschließend, daß bei unserem Netzwerkbeispiel aufgrund dessen, daß der generische Index der Zweigspannungs–Zweigstrom–Gleichungen gleich 1 ist, für die meisten Parameterwerte bei der Simulation nicht mit Schwierigkeiten zu rechnen ist. Tatsächlich versagte das Simulationsprogramm `PSPICE 7.1` lediglich für verschiedene Werte von α mit $|\alpha - 1| < 2 \cdot 10^{-3}$. Wie treffsicher die Vorhersage numerischer Probleme mit Hilfe des generischen Index bei anderen Beispielen ist, müssen spätere Untersuchungen zeigen. □

Wir haben also an Beispielen gesehen, daß implizite Differentialgleichungen Eigenschaften haben können, die ihre theoretische und numerische Untersuchung erschweren. In dieser Arbeit werden neue theoretische Resultate über implizite Differentialgleichungen angegeben, die einen Beitrag zum Verständnis des Lösungsverhaltens impliziter Differentialgleichungen leisten.

Im einzelnen ist diese Arbeit folgendermaßen gegliedert:

In Kapitel 1 entwickeln wir eine Lösungstheorie impliziter Differentialgleichungen, die sich hauptsächlich auf geometrische Argumente stützt. Dazu ordnen wir zunächst jeder impliziten Differentialgleichung ein verallgemeinertes Vektorfeld zu, das die gleiche Lösungsmenge wie die implizite Differentialgleichung hat. (Ein verallgemeinertes Vektorfeld ist, grob gesagt, eine Vorschrift, die an jedem Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine Menge von Richtungsvektoren vorgibt.)

Danach führen wir rein geometrische Untersuchungen durch, die das Ziel haben, die Analyse verallgemeinerter Vektorfelder auf die Analyse von Vektorfeldern auf Mannigfaltigkeiten zurückzuführen. Außerdem ordnen wir bestimmten verallgemeinerten Vektorfeldern eine nichtnegative ganze Zahl, den *geometrischen Index*, zu und zeigen, daß der geometrische Index des einer linearen regulären Algebro–Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zugeordneten verallgemeinerten Vektorfeldes mit dem Index der Schar der Koeffizientenmatrizen übereinstimmt.

Weiterhin wenden wir unsere Ergebnisse über verallgemeinerte Vektorfelder auf semi–implizite Algebro–Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^n$ — eine Klasse impliziter Differentialgleichungen — an und führen deren geometrischen Index als geometrischen Index des zugeordneten verallgemeinerten Vektorfeldes ein. Neben einem Index–0–Kriterium geben wir hinreichende Bedingungen dafür an, daß eine semi–implizite Algebro–Differentialgleichung vom geometrischen Index 1 ist. Aus semi–impliziten Algebro–Differentialgleichungen vom geometrischen Index größer als 1 konstruieren wir äquivalente implizite Differentialgleichungen, die einen um 1 kleineren geometrischen Index haben. Von den so erzeugten impliziten Differentialgleichungen kann man also erwarten, daß sie bei der numerischen Simulation weniger Schwierigkeiten bereiten als die ursprünglich zu untersuchenden Algebro–Differentialgleichungen.

Unsere Ergebnisse über verallgemeinerte Vektorfelder und semi–implizite Algebro–Differentialgleichungen sind Verallgemeinerungen der Ideen aus [Rhe84, Sza89, Sza90, Sza92, Rei89, Rei90b]. Durch die strikte Trennung zwischen geometrischen und formelmäßigen Betrachtungen ist unsere Darstellung klarer als die in den genannten Arbeiten. Obwohl unsere Terminologie an die in [Sza89, Sza90, Sza92, Rei89] angelehnt ist, gibt es aber auch wesentliche Unterschiede. Diese werden im einzelnen diskutiert, um zu zeigen, daß die von uns angegebenen Definitionen zweckmäßig sind.

Weiterhin gehen wir im Kapitel 1 auf mögliche Verallgemeinerungen unserer Ergebnisse ein. Wir zeigen, daß unsere Resultate über semi–implizite Algebro–Differentialgleichungen im wesentlichen gültig bleiben, wenn wir die Voraussetzung der Endlichdimensionalität fallenlassen und stattdessen Algebro–Differentialgleichungen in Banachräumen betrachten. Außerdem folgen wir dem Vorschlag aus [Rei92], partielle Differentialgleichungen als Algebro–Differentialgleichungen in Funktionenräumen aufzufassen. Am Beispiel der Gleichungen des THOMSONschen Leitungsmodells zeigen wir, mit welchen Schwierigkeiten man dabei konfrontiert wird.

Bereits im Beispiel 0.0.4 haben wir gesehen, daß die Kenntnis von Eigenschaften impliziter Differentialgleichungen, die von Parametern abhängen, für einzelne Parameterwerte von geringer praktischer Bedeutung ist. Vielmehr sind *generische* Eigenschaften von Interesse, Eigenschaften also, die das System für die meisten (in einem in Kapitel 2 präzisierten Sinne) Parameterwerte hat. In Kapitel 2 untersuchen wir solche generischen Eigenschaften der Zweigspannungs–Zweigstrom–Gleichungen linearer elektrischer Netzwerke.

Zunächst wird von uns der Zusammenhang zwischen Summanden einer bestimmten Entwicklung der Netzwerk–Determinante und Paaren konjugierter Bäume angegeben. Dadurch decken wir die Äquivalenz bekannter Kriterien für die Lösbarkeit von Netzwerken, die auf Matroiden basieren und solchen, die sich auf Paare konjugierter Bäume stützen, auf.

Weiterhin werden Netzwerke, deren Zweigspannungs–Zweigstrom–Gleichungen vom generischen Index 1 sind, charakterisiert. In Anlehnung an den Begriff des normalen Baumes erklären wir normale Paare konjugierter Bäume und beweisen dann die folgende Verallgemeinerung der Methode des normalen Baumes: Die generische Komplexitätsordnung eines Netzwerkes ist gleich der Summe aus der Anzahl der Kapazitäts–Zweige in und der Anzahl der Induktivitäts–Zweige außerhalb eines normalen Paares konjugierter Bäume. Die Spannungen über den Kapazitäts–Zweigen in und die Ströme durch die Induktivitäts–Zweige außerhalb eines normalen Paares konjugierter Bäume können als Anfangswerte unabhängig voneinander festgelegt werden; durch sie ist die Lösung des Netzwerkes eindeutig bestimmt.

Die bisher genannten Resultate gelten für Netzwerke, die neben Nullator–Norator Paaren, unabhängigen und gesteuerten Quellen, Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten auch ideale Übertrager und, unter einer topologischen Einschränkung, auch Gyratoren enthalten können. Für Netzwerke, die lediglich aus Nullator–Norator Paaren, unabhängigen Quellen, Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten bestehen, geben wir außerdem eine systematische Methode zur Index–1–Regularisierung unter Verwendung der minimalen Anzahl zusätzlicher Zweige an, eine Vorschrift zur Modifikation von Netzwerken also, die Netzwerke mit Zweigspannungs–Zweigstrom–Gleichungen vom generischen Index 1 liefert.

Schließlich betrachten wir Netzwerke, die lediglich aus unabhängigen Quellen, Widerständen, Induktivitäten, Kapazitäten, idealen Übertragern und Gyratoren bestehen. Für solche Netzwerke ist allgemein vermutet worden, daß der generische Index ihrer Zweigspannungs–Zweigstrom–Gleichungen nicht größer als 2 sein kann. In dieser Arbeit geben wir den ersten Beweis dieser Aussage an.

Die von uns angegebenen Methoden und Kriterien können mit Hilfe von Algorithmen durchgeführt bzw. geprüft werden, die lediglich ganzzahlige Operationen benutzen. Dabei ist die Anzahl der Operationen bei der Abarbeitung solcher Algorithmen durch ein Polynom in der Zweigzahl der Netzwerke beschränkt. Das läßt erwarten, daß eine spätere Implementation dieser Algorithmen auf einem Rechner, z.B. als Eingangstest eines Simulationsprogrammes, Ergebnisse in akzeptabler Rechenzeit liefert. Der am Ende von Kapitel 2 durchgeführte Komplexitäts–Vergleich mit einem bekannten Verfahren zum Auffinden von Paaren konjugierter Bäume zeigt die Überlegenheit des aus unseren Methoden abgeleiteten Algorithmus.

In Kapitel 3 untersuchen wir quasi–lineare implizite Differentialgleichungen der Form $0 = A(x)\dot{x} - g(x)$ in der Nähe singulärer Punkte vom Index–k–Typ für $k \in \{0, 1\}$.

Zunächst behandeln wir singuläre Punkte vom Index–0–Typ und geben hinreichende Bedingungen dafür an, daß es eine diffeomorphe Koordinatentransformation gibt, die die quasi–lineare Differentialgleichung in der Nähe eines singulären Punktes vom Index–0–Typ in die Normalform $x_1^r \dot{x}_1 \pm 1 = 0$, $\dot{x}_2 = \cdots = \dot{x}_n = 0$ überführt. Wir zeigen, daß der von Rabier untersuchte Fall einfacher singulärer Punkte dem Fall $r = 1$ dieser Normalform entspricht.

Danach untersuchen wir quasi–lineare Differentialgleichungen vom Typ $0 = A_1(x)\dot{x} - g_1(x)$, $0 = g_2(x)$ in der Nähe singulärer Punkte vom Index–1–Typ. (Im Gegensatz zu bekannten Resultaten nehmen wir nicht an, daß A_1 im betrachteten Punkt surjektiv ist.) Wir geben hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein singulärer Punkt vom Index–1–Typ der zu untersuchenden impliziten Differentialgleichung in einen singulären Punkt vom Index–0–Typ der impliziten Differentialgleichung $0 = A_1(x)\dot{x} - g_1(x)$, $0 = Dg_2(x)\dot{x}$ übergeht, auf den unsere Ergebnisse über singuläre Punkte vom Index–0–Typ anwendbar sind. Auf diese Weise geben wir hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein Punkt *nicht passierbar* ist, daß es also eine Lösung gibt, die zum betrachteten Punkt in endlicher Zeit konvergiert, über ihn hinaus aber nicht fortsetzbar ist.

Schließlich untersuchen wir semi–explizite Algebro–Differentialgleichungen des Typs $\dot{x} = g_1(x, y)$, $0 = g_2(x, y)$ unter relativ schwachen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, unter denen unsere bisherigen Ergebnisse über nicht passierbare Punkte quasi–linearer Differentialgleichungen nicht anwendbar sind. Auch in diesem Fall geben wir hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein Punkt *nicht passierbar* ist. Dabei schließen wir auch die Existenz solcher (verallgemeinerter) Lösungen durch den betrachteten Punkt aus, deren y–Komponente lediglich stetig ist.