

Eine neue Methode zum Auffinden von Paaren konjugierter Bäume

Gunther Reißig¹

Klaus Röbenack¹

¹TU Dresden, Fakultät Elektrotechnik, Lehrstuhl für Regelungs- und Steuerungstheorie (Prof. K. J. Reinschke), Mommsenstr. 13, 01062 Dresden.

E-Mail: reissig@erss11.et.tu-dresden.de und roebenak@erss11.et.tu-dresden.de.

Zusammenfassung. Es wird gezeigt, daß jedes Paar konjugierter Bäume eines Netzwerkes einem von Null verschiedenen Summanden in der Entwicklung einer Netzwerkdeterminante entspricht und umgekehrt. Das Auffinden eines solchen Summanden wird als "matroid partition" Problem formuliert, für dessen Lösung effektive Algorithmen bekannt sind. Die Anzahl der durchzuführenden ganzzahligen Operationen ist polynomial in der Zweigzahl, und der Algorithmus ist auf Netzwerke anwendbar, die neben Nullator-Norator Paaren, Widerständen und unabhängigen Quellen auch gesteuerte Quellen, ideale Übertrager und Gyratoren enthalten können.

Abstract. It is shown that every pair of conjugate trees of a network corresponds to a nonzero summand of a certain expansion of the network determinant. The search for such summands is formulated as a matroid partition problem, for which efficient algorithms are known. The number of operations to be performed is bounded by a polynomial in the number of branches of the network. The algorithm presented is applicable to networks containing nullator-norator pairs, resistors, and independent sources as well as controlled sources, ideal transformers, and gyrators.

1 Einleitung

Eines der Hauptanliegen der qualitativen Netzwerkanalyse ist es, Eigenschaften von Netzwerken allein aus den Netzwerkgraphen und den Typen der Netzwerkelemente zu ermitteln, ohne auch nur ein einziges Gleichungssystem aufzustellen.

Unter den Resultaten auf diesem Gebiet gibt es einige, die sich auf das Konzept des Paares konjugierter Bäume stützen (Hasler, 1986; Fosséprez, 1992). Die Frage nach der Existenz eines solchen Paares ist Bestandteil einiger Sätze über qualitative Eigenschaften nichtlinearer Netzwerke, wie zum Beispiel deren Lösbarkeit und Existenz der globalen Zustandsgleichungen (Fosséprez, 1992).

Oft hat man es mit sehr großen Netzwerken zu tun. Um mit Hilfe der oben erwähnten Kriterien Eigenschaften von solchen Netzwerken zu ermitteln, benötigt man effektive Algorithmen, die Paare konjugierter Bäume finden.

In der vorliegenden Arbeit wird ein polynomialer, ganzzahliger Algorithmus angegeben, der Paare konjugierter Bäume findet und auf Netzwerke anwendbar ist, die neben Nulloren, Widerständen und unabhängigen Quellen auch gesteuerte Quellen, ideale Übertrager und Gyratoren enthalten können.

2 Vorbereitung

Wie bereits erwähnt, werden Netzwerke betrachtet, die die folgenden Elemente enthalten können: Unabhängige und gesteuerte Strom- und Spannungsquellen, Widerstände, Nulloren, ideale Übertrager und Gyratoren.

Jede gesteuerte Quelle wird dabei entweder von genau einer Zweigspannung oder von genau einem Zweigstrom gesteuert, und der steuernde Zweig jeder spannungsgesteuerten bzw. stromgesteuerten Quelle ist eine unabhängige Stromquelle bzw. eine unabhängige Spannungsquelle (siehe Tab. 1).

Gegeben sei ein solches Netzwerk \mathcal{N} mit der Zweigmengenge $\{1, 2, \dots, b\}$ und dem Parametervektor $p \in \mathbb{R}^k$, der alle Parameter von \mathcal{N} enthält: Widerstands-, Kapazitäts-, Induktivitätswerte, Verstärkungskoeffizienten gesteuerter Quellen, Wicklungsverhältnisse von idealen Übertragern und Gyrationverhältnisse.

Zu ersetzendes Element					
Ersetzung 1					
Ersetzung 2					

Tabelle 1. Jeder Widerstand und jedes zu einer gesteuerten Quelle gehörende Zweigpaar wird durch die Elemente der zweiten oder dritten Zeile ersetzt.

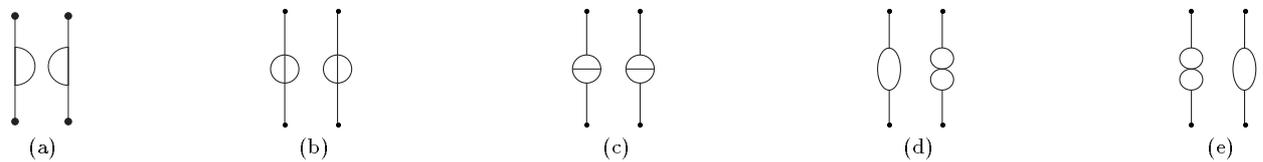


Abbildung 1. Der Gyrator (a) wird durch die Elemente in (b), (c), (d) oder (e) ersetzt.

Die Zweigspannungs-Zweigstrom Gleichungen von \mathcal{N} haben die Form

$$(1) \quad \begin{pmatrix} K \\ \hline M(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \\ i_1 \\ \vdots \\ i_b \end{pmatrix} = q(t),$$

wobei (v_1, \dots, v_b) bzw. (i_1, \dots, i_b) die Zweigspannungen bzw. Zweigströme, K eine die Kirchhoffschen Gleichungen repräsentierende Matrix und $M(p)$ eine die Spannungs-Strom Relationen repräsentierende Matrix bezeichnen.

Die Schreibweise

$$\begin{aligned} S &:= \{1, 2, \dots, 2b\} \\ V_j &:= j \\ I_j &:= j + b \end{aligned}$$

für alle Zweige j von \mathcal{N} , d.h. für $1 \leq j \leq b$, wird sich als zweckmäßig erweisen. Die Spalten der Matrizen $A(p)$ und $B(p)$ in (1) können nun mit V_1 bis V_b und I_1 bis I_b bezeichnet werden.

Um Teilmengen der Spaltenmenge dieser Matrizen in gleicher Weise handhaben zu können, definieren wir

$$V_J := \{V_j \mid j \in J\} \quad \text{und} \quad I_J := \{I_j \mid j \in J\}$$

für alle Teilmengen J der Zweigmengen von \mathcal{N} .

Nun wird der Begriff eines Paares konjugierter Bäume angegeben. (Falls das Netzwerk keine Gyrateure enthält, stimmt die folgende Definition mit der aus (Fosséprez, 1992) überein.)

2.1 Definition: Ein Paar vollständiger Bäume¹ (t_1, t_2) des Graphen eines Netzwerkes \mathcal{N} heißt Paar konjugierter Bäume, falls alle Gyrateure, Widerstände, Induktivitäten, Kapazitäten und gesteuerten Quellen von \mathcal{N} im Einklang mit Tab. 1 und Abb. 1 so ersetzt werden können, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

¹ Wir gebrauchen die Begriffe *vollständiger Baum* und *vollständiger Wald* synonym.

(i) Sowohl t_1 als auch t_2 enthalten alle unabhängigen Spannungsquellen, keine unabhängigen Stromquellen und genau einen Zweig eines jeden idealen Übertragers,

(ii) t_1 enthält alle Noratoren und keinen Nullator,

(iii) t_2 enthält alle Nullatoren und keinen Norator

des resultierenden Netzwerkes. □

Das Verhältnis zwischen Paaren konjugierter Bäume und Summanden der Entwicklung von $\det \begin{pmatrix} K \\ M(p) \end{pmatrix}$ nach den Zeilen von $M(p)$ spielt im folgenden eine wichtige Rolle. Jeder Summand dieser Entwicklung ist das Produkt aus der Determinante einer $b \times b$ Untermatrix von K und b Elementen von $M(p)$. Diese anschauliche Erklärung wird im folgenden etwas formalisiert.

Die Menge $\{1, \dots, m\}$ der Zeilen und die Menge $\{1, \dots, n\}$ der Spalten einer, möglicherweise parameterabhängigen, $m \times n$ Matrix B ($n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) werden mit $\text{Row}(B)$ und $\text{Col}(B)$ bezeichnet.

Für jede Menge von Spalten $C \subseteq \text{Col}(B)$ bedeutet $B[C]$ die aus den Spalten C bestehende Untermatrix von B . Ebenso ist $B[R, C]$ für jede Menge von Zeilen $R \subseteq \text{Row}(B)$ die aus den Zeilen R bestehende Untermatrix von $B[C]$.

Ein *Term* von B ist eine Menge $T \subseteq \text{Row}(B) \times \text{Col}(B)$, für die

$$(r = r' \vee c = c') \implies (r, c) = (r', c')$$

für alle Paare $(r, c), (r', c') \in T$ gilt, d.h., zwei verschiedene Elemente von T gehören weder zur selben Zeile noch zur selben Spalte von B . (Im Falle $\min\{m, n\} = 0$ ist \emptyset der einzige Term von B .)

Die Mengen

$$\begin{aligned} \text{Row}(T) &= \{r \in \text{Row}(M) \mid \exists c (r, c) \in T\}, \\ \text{Col}(T) &= \{c \in \text{Col}(M) \mid \exists r (r, c) \in T\} \end{aligned}$$

sind die *Zeilen-* bzw. *Spaltenmenge* von T .

Der Term T von B heißt *verschieden von Null*, falls es ein $p \in \mathbb{R}^k$ gibt, so daß $B(p)_{r,c} \neq 0$ für alle $(r, c) \in T$ gilt, er heißt *voll*, falls $|T| = \min\{m, n\}$. (Dabei bedeutet $|\cdot|$ die Anzahl der Elemente.) Die maximale Anzahl von Elementen eines von Null verschiedenen Terms von B heißt *Term-Rang* von B und wird mit $\text{rank}_t(B)$ bezeichnet.

Es seien nun $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+q}, \mathbb{R}^m)$ eine $m \times (m+q)$ -Matrix und $B: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+q}, \mathbb{R}^q)$ eine parameterabhängige $q \times (m+q)$ -Matrix, $m, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ein *Term* von (A, B) ist ein voller Term T von B . Der Term T von (A, B) heißt *verschieden von Null*, falls T als Term von B verschieden von Null ist und $A[\text{Col}(A) \setminus \text{Col}(T)]$ bijektiv ist.

3 Paare konjugierter Bäume und Terme von Determinantenentwicklungen

3.1 Theorem: (1) seien die Zweigspannungs-Zweigstrom Gleichungen eines Netzwerkes \mathcal{N} . Es sei $S_1 \subseteq S$ und

$$(2) \quad t_1 = (I_{\{1, \dots, b\}} \setminus S_1) - b,$$

$$(3) \quad t_2 = V_{\{1, \dots, b\}} \cap S_1,$$

wobei '−' in (2) elementweise zu verstehen ist.

Dann gibt es genau dann einen von Null verschiedenen Term von (K, M) mit der Spaltenmenge S_1 , wenn (t_1, t_2) ein Paar konjugierter Bäume von \mathcal{N} ist. □

Beweis: Offenbar gilt für einen beliebigen Zweig z

$$\begin{aligned} V_z \in S_1 &\iff z \in t_2, \\ I_z \in S_1 &\iff z \notin t_1. \end{aligned}$$

Außerdem gibt es genau dann einen von Null verschiedenen Term von (K, M) mit der Spaltenmenge S_1 , wenn $\text{rank } K[S \setminus S_1] = \text{rank}_t M[S_1] = b$ gilt.

Weiterhin ist $K[S \setminus S_1]$ genau dann bijektiv, wenn t_1 und t_2 vollständige Wälder des ungerichteten Netzwerkgraphen von \mathcal{N} sind (Recski, 1989). Diese Verhältnisse verdeutlicht die Darstellung

$$\begin{pmatrix} K \\ M \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} & \overbrace{\quad}^{S_1} & \\ & \begin{array}{c|c} t_2 & t_1 \\ \hline \blacksquare & \blacksquare \end{array} & \\ \hline & M[S_1] & \end{array} \right),$$

in der $K[S \setminus S_1]$ aus den zwei schwarzen Untermatrizen von K besteht.

Die Matrix M ist, bis auf Permutation ihrer Spalten, eine Blockmatrix aus zeilen- und spaltendisjunkten Blöcken $M_i = M[R_i, C_i]$, $i \in \{1, \dots, l\}$, von denen jeder die Spannungs-Strom Relation genau eines Netzwerkelementes repräsentiert. Folglich hat $M[S_1]$ genau dann den Term-Rang b , wenn für alle $i \in \{1, \dots, l\}$ die Matrix $M[R_i, C_i \cap S_1]$ quadratisch ist und den Term-Rang $|R_i|$ hat.

Zunächst wird ein Spannungsquellenzweig x betrachtet. Der entsprechende Block

$$M_i(p) = \left(\begin{array}{c|c} V_x & I_x \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right)$$

hat eine Zeile und zwei Spalten. Offenbar ist $M[R_i, C_i \cap S_1]$ genau dann quadratisch und vom Term-Rang 1, wenn $S_1 \cap \{V_x, I_x\} = \{V_x\}$ gilt, was wiederum zu $x \in t_1 \cap t_2$ äquivalent ist.

Ist x ein Nullator-Zweig und

$$M_i(p) = \left(\begin{array}{c|c} V_x & I_x \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

der entsprechende Block, so ist $M[R_i, C_i \cap S_1]$ genau dann quadratisch und vom Term-Rang 2, wenn $S_1 \cap \{V_x, I_x\} = \{V_x, I_x\}$ gilt, was wiederum zu $x \in t_2 \wedge x \notin t_1$ äquivalent ist.

Analoge Argumente führen bei Stromquellen, Noratoren und Widerständen zum Ziel.

Stellvertretend für gesteuerte Quellen wird nun eine stromgesteuerte Stromquelle (CCCS) mit steuerndem Zweig x , gesteuertem Zweig y , Verstärkungskoeffizienten p_j und dazugehorendem 2×4 Block

$$M_i(p) = \left(\begin{array}{cc|cc} V_x & V_y & I_x & I_y \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_j & -1 \end{array} \right)$$

betrachtet. Offenbar ist $M[R_i, C_i \cap S_1]$ genau dann quadratisch und vom Term-Rang 2, wenn $S_1 \cap \{V_x, I_x, V_y, I_y\} = \{V_x, I_x\}$ oder $S_1 \cap \{V_x, I_x, V_y, I_y\} = \{V_x, I_y\}$ gilt, was wiederum zu $\{x, y\} \cap t_1 = \{y\} \wedge \{x, y\} \cap t_2 = \{x\}$ bzw. $\{x, y\} \cap t_1 = \{x, y\} \cap t_2 = \{x\}$ äquivalent ist und den Ersetzungen 1 bzw. 2 in Tab. 1 entspricht.

Es seien nun x und y die Zweige eines Gytrators mit der Gytrationskonstante p_j und dem dazugehörenden Block

$$M_i(p) = \left(\begin{array}{cc|cc} V_x & V_y & I_x & I_y \\ \hline 1 & 0 & 0 & p_j \\ 0 & 1 & -p_j & 0 \end{array} \right).$$

$M[R_i, C_i \cap S_1]$ ist genau dann quadratisch und vom Term-Rang 2, wenn $S_1 \cap \{V_x, I_x, V_y, I_y\}$ einen der vier Werte $\{V_x, V_y\}$, $\{V_x, I_x\}$, $\{V_y, I_y\}$ oder $\{I_x, I_y\}$ annimmt. Es gilt also entweder $\{x, y\} \subseteq t_1 \cap t_2$ oder $\{x, y\} \cap t_1 = \{y\} \wedge \{x, y\} \cap t_2 = \{x\}$ oder $\{x, y\} \cap t_1 = \{x\} \wedge \{x, y\} \cap t_2 = \{y\}$ oder $\{x, y\} \cap (t_1 \cup t_2) = \emptyset$, was den Ersetzungen in Abb. 1(b), (d), (e) und (c) entspricht.

Es seien nun x und y die Zweige eines idealen Übertragers und

$$(4) \quad M_i(p) = \left(\begin{array}{cc|cc} V_x & V_y & I_x & I_y \\ \hline n & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \end{array} \right)$$

sei der dazugehörige Block. $M[R_i, C_i \cap S_1]$ ist genau dann quadratisch und vom Term-Rang 2, wenn $S_1 \cap \{V_x, I_x, V_y, I_y\}$ einen der vier Werte $\{V_x, I_x\}$, $\{V_x, I_y\}$, $\{V_y, I_x\}$ oder $\{V_y, I_y\}$ annimmt, also genau dann, wenn $|S_1 \cap \{V_x, V_y\}| = |S_1 \cap \{I_x, I_y\}| = 1$ gilt, was zu $|\{x, y\} \cap t_1| = |\{x, y\} \cap t_2| = 1$ äquivalent ist. \square

Mit obigem Theorem wurde die Aufgabe, ein Paar konjugierter Bäume zu finden, auf die Aufgabe, einen von Null verschiedenen Term von (K, M) zu finden, zurückgeführt. Wie findet man aber nun einen solchen Term?

Die Mengen F_K und F_M seien folgendermaßen definiert:

$$F_K = \{S_1 \subseteq \{1, 2, \dots, 2b\} \mid \text{rank } K[S_1] = |S_1|\} \cup \{\emptyset\}$$

$$F_M = \{S_1 \subseteq \{1, 2, \dots, 2b\} \mid \text{rank}_t M[S_1] = |S_1|\} \cup \{\emptyset\}.$$

Offenbar gibt es genau dann einen von Null verschiedenen Term von (K, M) mit der Spaltenmenge S_1 , wenn sowohl $S_1 \in F_M$ als auch $S \setminus S_1 \in F_K$ gelten. Da F_K und F_M die Systeme unabhängiger Mengen zweier Matroide sind, wurde also die Aufgabe, ein Paar konjugierter Bäume zu finden, auf ein Standard-Problem – das *matroid partition* Problem (Recski, 1989) – zurückgeführt.

4 Beispiele

Das Auffinden von Paaren konjugierter Bäume wird an drei Beispielen vorgeführt.

4.1 Beispiel: Für das in Abb. 2(a) abgebildete Netzwerk aus (Chua and Lin, 1975, Fig. 15-5) soll ein Paar konjugierter Bäume gefunden werden. In der Matrix

$$\begin{pmatrix} K \\ M(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \bullet & -1 & \bullet & \cdot & 1 & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet \\ \cdot & -1 & -1 & \bullet & 1 & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet \\ \cdot & \bullet & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet \\ \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & 1 \\ \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \bullet \\ \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \textcircled{-1} & n & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n & \textcircled{1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \textcircled{r} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \textcircled{1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \alpha & \textcircled{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \textcircled{1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

aus den Zweigspannungs-Zweigstrom Gleichungen (1) dieses Netzwerkes sind n , α und r das Wicklungsverhältnis, der Verstärkungskoeffizient der gesteuerten Quelle und der Widerstandswert. Offenbar ist

$$T = \{(1, V_1), (2, I_2), (3, I_3), (4, I_4), (5, V_5), (6, V_6)\}$$

ein von Null verschiedener Term von (K, M) . (Die zu Elementen von T gehörenden Matrizenelemente von M sind mit einem Kreis markiert.)

Der Term T hat die Spaltenmenge

$$S_1 = \{V_1, V_5, V_6, I_2, I_3, I_4\}.$$

(Die Spalten von $K[S \setminus S_1]$ sind in der obigen Matrix fett dargestellt.)

Nach Theorem 3.1 ist $(\{1, 5, 6\}, \{1, 5, 6\})$ ein Paar konjugierter Bäume des Netzwerkes aus Abb. 2(a). Dieses Paar ist in Abb. 2(b) illustriert. \square

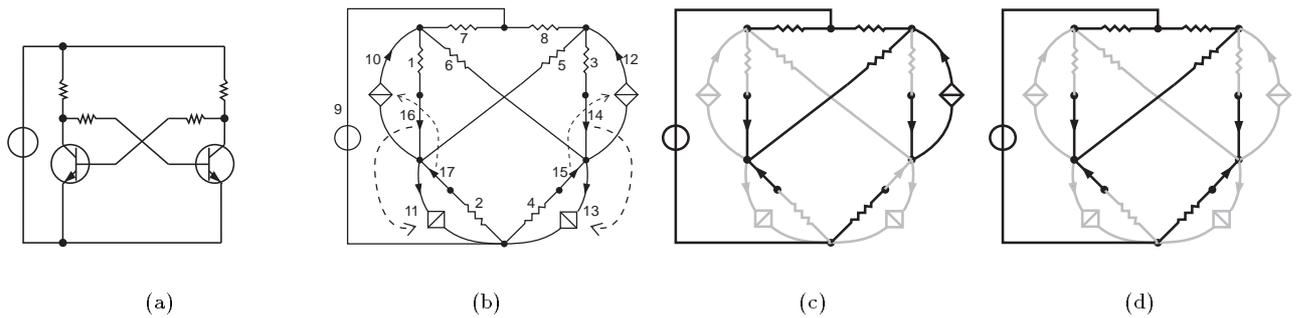


Abbildung 3. (a) Flip-Flop Netzwerk. (b) Netzwerk, das man aus (a) durch Ersetzen der Transistoren durch lineare Ebers-Moll Ersatznetzwerke erhält. Dieses Netzwerk hat ein Paar konjugierter Bäume (t_1, t_2) . Die Zweige von t_1 sind in (c) fett, die von t_2 in (d).

Der Term T hat die Spaltenmenge

$$S_1 = \{V_4, V_5, V_7, V_8, V_9, V_{14}, V_{15}, V_{16}, V_{17}, I_1, I_2, I_3, I_6, I_{10}, I_{11}, I_{13}, I_{15}\}.$$

(Die Spalten von $K[S \setminus S_1]$ sind in der obigen Matrix fett dargestellt.)

Nach Theorem 3.1 hat das Netzwerk ein Paar konjugierter Bäume (t_1, t_2) mit

$$t_1 = \{4, 5, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 17\},$$

$$t_2 = \{4, 5, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17\}.$$

Dieses Paar ist in Abb. 3(c) und (d) illustriert. □

5 Abschließende Bemerkungen

Es wurde ein Algorithmus zum Auffinden von Paaren konjugierter Bäume angegeben, der auf Netzwerke anwendbar ist, die Widerstände, unabhängige und gesteuerte Quellen, Nulloren, ideale Übertrager und Gyratoren enthalten.

Die Anzahl der durchzuführenden Operationen ist dabei durch ein Polynom in der Zweigzahl nach oben beschränkt. Das ist für Netzwerke, die gesteuerte Quellen, ideale Übertrager oder Gyratoren enthalten, ein neues Resultat.

Für Netzwerke mit gesteuerten Quellen war es bisher üblich, die gesteuerten Quellen durch Ersatznetzwerke aus Widerständen und Nulloren zu ersetzen und das entstehende Netzwerk zu behandeln (Fosséprez, 1992). Dieses Vorgehen erhöht die Zweigzahl des zu behandelnden Netzwerkes beträchtlich. (Die Anwendung der in (Fosséprez, 1992) vorgeschlagenen Ersetzung auf das Netzwerk aus Beispiel 4.1 führt auf ein Netzwerk mit doppelter Zweigzahl.) Es ist deshalb zu erwarten, daß die Anwendung des in dieser Arbeit vorgeschlagenen Algorithmus' auf große Netzwerke im Vergleich zu bisher üblichen Algorithmen zu einer erheblichen Reduzierung der Rechenzeit führt.

Literatur

Chua, L. O. and Lin, P.-M., *Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

Fosséprez, M., *Non-linear Circuits: Qualitative Analysis of Non-linear, Non-reciprocal Circuits*, John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1992.

Hasler, M., Non-linear non-reciprocal resistive circuits with a structurally unique solution, *Internat. J. Circuit Theory Appl.*, 14, 237–262, 1986.

Reeski, A., *Matroid Theory and its Applications in Electrical Network Theory and in Statics*, vol. 6 of *Algorithms and Combinatorics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1989.